GEZEGENLERİN HAREKETİ (II)

H. Turgay Kaptanoğlu *

D. Gözlemden Kurama

İlk olarak Kepler'in üç kanununun doğruluğunu kabul edelim. Bunun yanında Newton'ın ikinci kanununu da kabul edeceğiz. Bu kanunu en kısa olarak

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{7}$$

şeklinde ifade edebiliriz; burada m bir cismin kütlesi, $\mathbf{F}$ ona etki eden kuvvet ve $\mathbf{a}$ da bu kuvvet altında hareket eden cismin ivmesidir. Bu kısımda amacımız ivmeyi belirleyerek kuvvetin nasıl bir şey olması gerektiğine karar vermek; sonuçta kuvvet Newton'ın kütle çekim kanununun belirttiği gibi çıkacak. Bizim cismimiz tabii ki gezegenlerden herhangi biri, m de onun kütlesi. Kolayca unutulan bir nokta da (7)'de cisimlerin birer nokta gibi düşünülmeleri gerektiği. Biz de gezegenin bütün kütlesini, kendi merkezinde yoğunlaşmış gibi düşüneceğiz; onun boyutlarını veya kendi merkezi etrafındaki hareketini hesaba katmayacağız. Gezegenlerin güneşe olan uzaklıkları onların boyutlarından o kadar fazla ki, onları birer nokta gibi düşünmek hesaplarda gözlenenden farkedilir bir sapmaya yol açmıyor.

Newton'ın ikinci kanunu aslında yukarıda belirtildiğinden biraz daha genel olarak

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v}$$

şeklindedir. Burada $m\mathbf{v}$ *momentum*'dur; yani Newton, hareket halindeki bir cismin momentumunun zamana göre değişme hızının cismin üzerindeki kuvvete eşit olduğunu söyler. Fakat cismin kütlesi değişmiyorsa, ki süre olarak yüzyılları aldığımızda bile gezegenlerin kütlesi yörüngelerini pek etkileyecek kadar değişmez, $dm/dt = 0$ olur ve bu kanun daha çok bilinen "kuvvet eşittir kütle çarpı ivme" haline dönüşür.

Bu kanunda $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{v}$ vektörler, m ise pozitif bir gerçel sayıdır. Buradan kanunun kısa halinde kuvvetin ve ivmenin aynı yönde olduğu çıkar. Kütlenin değişebildiği genel halde böyle bir zorunluluk yoktur, çünkü yukarıda hızın ve ivmenin aynı yönde olması gerekmediğini görmüştük; o zaman kuvvet ikisi arasında bir yöndedir.

K1 bize her gezegenin bir düzlemde hareket ettiğini söyler. Bu düzlemde kutupsal koordinatlar [**3**] kullanalım; güneş O'da olsun. Gezegenin koordinatlarına ise (r,θ) diyelim. Henüz x ve y eksenlerinin yönünü belirlememize gerek yok. Hem r, hem θ zamana bağlı olarak değişir; yani $r = r(t)$ ve $\theta = \theta(t)$ yazabiliriz. O'dan (r,θ)'ya giden konum vektörü $\mathbf{r}$'nin t zamanında süpürdüğü alanı $A(t)$ ile gösterirsek, **K2** kanunu, bunun değişme hızının, yani dA/dt'nin sabit olduğu ifadesinden başka bir şey değildir. (6) yardımıyla bu iddiayı

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{sabit} = h \tag{8}$$

şeklinde yazabiliriz. Sonra her iki tarafın zamana göre türevini alarak

$$r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

buluruz. (5)'i göz önüne getirirsek, bu son denklemin sol tarafının, ivmenin θ yönündeki bileşeni olduğunu görürüz. O zaman gezegenin ivmesi $\mathbf{r}$ doğrultusundadır:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{b}_r. \tag{9}$$

Bu doğrultunun O ile (r,θ)'yı, yani güneşle gezegeni birleştiren doğrultu olduğunu hatırlayalım.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

İvme ile kuvvet aynı yönde olduğundan, Kepler'in ilk iki kanunundan, gezegenlerin üzerinde, güneşle onları birleştiren doğrultuda etki eden bir kuvvet olduğu ortaya çıkar. Güneşi O noktasında mıhlanmış gibi düşündüğümüzden, böyle bir kuvvete *merkezsel kuvvet* denir.

K1 ayrıca gezegenin yörüngesinin elips olduğunu söyler. Güneşi O'ya yerleştirmekle elipsin bir odağını seçmiş olduk. Şimdi x eksenini elipsin ekseni boyunca O'dan bu odağa yakın olan tepe noktasına doğru gidiyor olarak alalım; y ekseni x ekseninin $90°$ saat yönünün aksi yönde çevrilmişidir. O halde yörüngenin kutupsal koordinatlardaki denklemi

$$r(1 + e\cos\theta) = ke \tag{10}$$

biçimindedir. Burada e elipsin dışmerkezliliğidir ve $0 < e < 1$ eşitsizliğini sağlar; O'daki odağa karşılık gelen doğrultman ise $x = -k$'dir ($k > 0$) [**3**]. (10)'un iki tarafını zamana göre türevleyelim:

$$\frac{dr}{dt}(1 + e\cos\theta) - er\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

r ile çarpıp $r(1 + e\cos\theta)$ yerine ke yazalım:

$$ke\frac{dr}{dt} - er^2\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

e ile bölüp (8)'i kullanalım:

$$k\frac{dr}{dt} - h\sin\theta = 0.$$

Tekrar türev alalım:

$$k\frac{d^2r}{dt^2} - h\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

k ile bölüp tekrar (8)'i kullanalım:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h^2}{kr^2}\cos\theta.$$

$\cos\theta$ yerine (10)'dan elde edeceğimiz ifadeyi yazalım:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h^2}{kr^2}\left(\frac{k}{r} - \frac{1}{e}\right) = \frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{ke}\frac{1}{r^2}.$$

(8)'den

$$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = \frac{h^2}{r^3}$$

çıkar. Son iki denklemi birbirinden çıkartalım:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{h^2}{ke}\frac{1}{r^2}.$$

Şimdi bu son denklemi (9) ile karşılaştırırsak

$$\mathbf{a} = -\frac{h^2}{ke}\frac{1}{r^2}\mathbf{b}_r$$

buluruz. Newton'ın ikinci kanunu sayesinde ise

$$\mathbf{F} = -\frac{h^2m}{ke}\frac{1}{r^2}\mathbf{b}_r$$

elde ederiz. Buradan iki önemli sonuç çıkar: Gezegenin üzerinde etki eden kuvvet, gezegenle güneşin arasındaki uzaklığın karesiyle ters orantılıdır. Ve h^2, m, k, e, r^2 pozitif sayılar olduğundan, kuvvet $\mathbf{b}_r$'ye zıt yönde, yani gezegenden güneşe doğrudur.

Henüz h^2/ke sabiti hakkında pek bir şey bilmiyoruz, ama Kepler'in üçüncü kanununu kullanmadık daha. Önce elipste tepe noktaları arasındaki uzaklığa $2A$ dendiğini ve ekseni x ekseni olan elipsin tepe noktalarının $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ iken elde edildiğini hatırlayalım [**3**]. (Aslında A yerine a kullanılır genellikle, ama ivme vektörünün boyuyla karışmasın diye A'yı tercih ettik.) O'nun ve x ekseninin seçimi nedeniyle tepe noktaları sırayla gezegenin güneşe en yakın ve en uzak olduğu noktalardır; *günberi* ve *günöte* noktaları olarak adlandırılırlar. Buralardaki r değerlerine $r_ö$ ve r_b diyelim. (10)'dan bunları bulup

$$2A = r_ö + r_b = \frac{ke}{1-e} + \frac{ke}{1+e} = \frac{2ke}{1-e^2} \tag{11}$$

yazabiliriz. Elipsteki diğer bazı bağıntılar bu eşitlik yardımıyla

$$B^2 = A^2 - C^2 = A^2 - (Ae)^2 = A^2(1-e^2) = Ake \tag{12}$$

verir. $r_ö - r_b = 2C$ bağıntısı da açıktır. Böylece

$$\frac{r_ö - r_b}{r_ö + r_b} = e \tag{13}$$

gerçeklenir. Öte yandan, gezegenin konum vektörünün güneşin çevresinde bir tam dönüş süresinde, yani T'de süpürdüğü alan elipsin alanıdır, yani πAB'dir [**2**]. Bu alanı aynı zamanda $hT/2$ diye de yazabiliriz; o halde

$$h = \frac{2\pi AB}{T} \tag{14}$$

olur. Buradan da

$$\frac{h^2}{ke} = \frac{1}{ke}\left(\frac{2\pi AB}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{ke}\frac{A^2B^2}{T^2}$$
$$= \frac{4\pi^2}{ke}\frac{A^2Ake}{T^2} = 4\pi^2\frac{A^3}{T^2}$$

elde ederiz. **K3** şimdi bize bu son ifadenin gezegenlerden bağımsız bir sabit olduğunun söyler. Halbuki h, k, e, A, T'nin her biri gezegenden gezegene değişir. Gene de sabitin bir güneş sisteminden diğerine değişebileceğini göz önünde tutmalıyız. O yüzden bu sabiti GM şeklinde yazarız; burada M güneşin kütlesi ve G evrensel (yani değeri sadece kullanılan birim sistemine bağlı olan) bir sabittir. Sonuç olarak elimizde

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{b}_r \tag{15}$$

var. Tekrarlarsak, güneş gezegenler üzerinde, büyüklüğü güneşin ve gezegenin kütleleriyle doğru ve aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı bir kuvvet uygular; bu kuvvetin yönü gezegenden güneşe doğrudur (eksi işareti nedeniyle).

Dikkat edilirse bu kanunda gezegenin ve güneşin kütlelerinin yer değiştirmesi kuvveti değiştirmiyor. Buraya kadarki işlemleri gezegeni O'ya ve güneşi (r, θ)'ya koyarak yapsak, gene yukarıdaki denklemi elde ediyoruz; üstelik bu sefer gezegen güneşi çekiyor sonucu çıkıyor. Dolayısıyla Newton'ın yaptığı gibi kütle çekim kanunu **G**'ye ulaşıyoruz ki bunun matematiksel ifadesi gene (15) eşitliği.

Kuvvetin uzaklığın başka bir kuvvetiyle değil de karesiyle ters orantılı olmasının ilginç sonuçları vardır. Örneğin küpüyle ters orantılı olsaydı, bütün yörüngeler güneşin bulunduğu noktadan geçerdi, yani gezegenler eninde sonunda güneşe çekilip yok olurlardı. Ayrıca elektrik yüklü cisimlerin, bu yüklerin sonucu olarak birbirlerine uyguladıkları kuvvetin şiddeti de uzaklığın karesiyle ters orantılıdır. Ama şimdi kuvvet elektrik yüklerinin aynı veya zıt olmasına bağlı olarak itme veya çekme olabilir. Cisimlerin hareketleri sırasında izledikleri yol da koninin diğer kesitleri olabilir. Örneğin artı yüklü bir cismin, gene artı yüklü ve sabit duran bir cisme yaklaşırken itme nedeniyle yolundan sapması, genellikle hiperbol bir yörünge üzerinde meydana gelir. Cisimler kütleleri nedeniyle ise birbirlerini hep çekerler.

E. Kuramdan Gözleme

Kepler'in gözlemlerinin Newton'ın ikinci kanunu dediğimiz hareket ilkesiyle Newton'ın kütle çekim kanununu gerektirdiğini gösterdik. Bu gerektirme, Kepler kanunlarının Newton'ın kütle çekim kanunundan çıkan tek gezegen hareket sistemi olduğu anlamına gelmez; yalnızca Kepler kanunlarının Newton'ın kütle çekim kanunuyla tutarlı olduğunu gösterir. Newton'ın kütle çekim kanununu geçerli olarak kabul etmeden önce, onun gezegenlerle ilgili sonuçlarının Kepler'in gözlemleriyle aynı olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Bir kez daha Newton'ın ikinci kanununu (kuvvet eşittir kütle çarpı ivme) ve kuvvetin merkezsel ve çeken olduğunu kabul edeceğiz. Güneşi O'ya yerleştirirsek, kuvvetin, güneşten gezegene doğru olan konum vektörünün zıt yönünde olması demektir bu. Kuvvetin ve ivmenin yönü aynı (7) olduğundan, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{r}$ paraleldir ve $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ sağlanır. Aynı nedenden dolayı $\mathbf{v}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ da doğrudur. Buradan

$$\begin{aligned}\mathbf{0}=\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}&=\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\mathbf{v}\times\mathbf{v}\\ =\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{v}&=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\end{aligned}$$

elde ederiz; yani $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ zamandan bağımsız olan sabit bir $\mathbf{h}$ vektörüdür. (İyi fizik bilenler için, $\mathbf{h}$, gezegenin birim kütle başına düşen *açısal momentum*udur.) Eğer $\mathbf{h}=\mathbf{0}$ olsaydı, $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{v}$ paralel olurdu ve $\mathbf{v}$ hareketin yönünü gösterdiğinden, gezegen güneşe doğru (veya güneşten uzaklaşan) bir çizgi üzerinde hareket ederdi. Dolayısıyla $\mathbf{h}$ sıfır vektörü olamaz. O zaman $\mathbf{r}(t)$ ve $\mathbf{v}(t)$'nin her biri t'nin bütün değerleri için $\mathbf{h}$'ye diktir. Bu ise $\mathbf{r}(t)$ ve $\mathbf{v}(t)$'nin, $\mathbf{h}$'ye dik olarak tanımlanan düzlemde bulunması demektir; yani merkezsel kuvvet altında hareket, bir düzlemde meydana gelir. Bu Kepler'in birinci kanunu **K1**'in bir kısmıdır.

Şimdi z eksenini $\mathbf{h}$ ile aynı yönde seçelim. O zaman $\mathbf{h}=h\mathbf{k}$ diyebiliriz ve gezegenin hareketi xy düzleminde gerçekleşir. Bu düzlemde kutupsal koordinatlar kullanalım; henüz $\theta=0$ ışınının yönünü belirlememiz gerekmiyor. (3), (4) ve (2)'yi hatırlayalım.

$$\begin{aligned}h\mathbf{k}=\mathbf{h}=\mathbf{r}\times\mathbf{v}&=(r\mathbf{b}_r)\times(\dot{r}\mathbf{b}_r+r\dot{\theta}\mathbf{b}_\theta)\\ &=r^2\dot{\theta}(\mathbf{b}_r\times\mathbf{b}_\theta)=r^2\dot{\theta}\mathbf{k}\end{aligned}$$

eşitliklerinden $h=r^2\dot{\theta}$ elde ederiz. (Buradan h'nin açısal momentum bölü kütle olduğu daha açık görülüyor.) (6) denkleminden $r^2\dot{\theta}$'nın alan süpürme hızının iki katı olduğunu biliyoruz. h sabit olduğundan, vardığımız sonuç Kepler'in ikinci kanunu **K2**'den başka bir şey değildir. Bu kanunu elde ederken kuvvetin sadece merkezsel olduğunu kullandık; onun uzaklığın karesiyle ters orantılı olduğunu kullanmadık.

Gezegenin yörüngesinin nasıl bir eğri olduğunu bulmak için Newton'ın kütle çekim kanununu, ikinci kanunuyla beraber bütün gücüyle kullanacağız. (15) ve (7)'deki kuvvetleri birbirlerine eşitlemek bize

$$m\mathbf{a}=-\frac{GMm}{r^2}\mathbf{b}_r \tag{16}$$

verir. Zincir kuralından ve az önceki ikinci Kepler kanunundan

$$-\frac{GM}{r^2}\mathbf{b}_r=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d\mathbf{v}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\mathbf{v}}{d\theta}\frac{h}{r^2}$$

yazalım. Buradan

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\theta}=-\frac{GM}{h}\mathbf{b}_r=\frac{GM}{h}\frac{d\mathbf{b}_\theta}{d\theta}$$

çıkar. G, M ve h sabit olduklarından

$$\mathbf{v}=\frac{GM}{h}\mathbf{b}_\theta+\mathbf{c}$$

buluruz; burada $\mathbf{c}$ sabit bir vektördür. Son eşitliği

$$|\mathbf{v}-\mathbf{c}|=\frac{GM}{h}$$

diye yazalım. İrlandalı William Hamilton'ın (1805–1865) bulduğu [**1**] bu sonuç şu anlama gelir: Gezegenin hız vektörünün ucu, dibi hep aynı noktada tutulursa, bir çember çizer. Gezegenlerinin yörüngelerinin çemberlerden meydana geldiği şeklindeki eski düşünceleri yıkan Kepler kanunlarından tekrar bir çember elde etmek biraz şaşırtıcı. Dikkat edilmesi gereken, çemberi çizenin konum vektörü değil, hız vektörü olduğu; konum vektörü tabii ki elips çizer.

Artık x ve y eksenlerinin yönünü belirleyebiliriz. y eksenini $\mathbf{c}$ vektörüyle aynı yönde seçelim; x ekseni de böylece y ekseni 90° saat yönünde çevrilerek bulunur. Şimdi pozitif bir e sabiti için

$$\begin{aligned}\mathbf{c}&=\frac{GMe}{h}\mathbf{j},\\ \mathbf{v}&=\frac{GM}{h}(\mathbf{b}_\theta+e\mathbf{j})\end{aligned}$$

yazabiliriz. Sonra da $\mathbf{h}$'nin tanımından (1) ve (3)'ü kullanarak

$$\begin{aligned}h\mathbf{k}=\mathbf{r}\times\mathbf{v}&=\mathbf{r}\times\frac{GM}{h}(\mathbf{b}_\theta+e\mathbf{j})\\ &=(r\mathbf{b}_r)\times\left(\frac{GM}{h}\mathbf{b}_\theta\right)\\ &\qquad+(r\cos\theta\mathbf{i}+r\sin\theta\mathbf{j})\times\left(\frac{GMe}{h}\mathbf{j}\right)\\ &=\frac{GM}{h}r(1+e\cos\theta)\mathbf{k}\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifadeyi r için çözersek,

$$r = \frac{h^2/GM}{1 + e\cos\theta} \tag{17}$$

sonucuna varırız. Bu ise dışmerkezliliği e olan bir koni kesitinin denklemidir [**3**]. Eğrinin bir odağı O'dadır, yani güneş odaktadır; buna karşılık gelen doğrultmanı ise

$$x = \frac{h^2}{GMe}$$

doğrusudur. Hangi eğri olduğu e'nin değerine göre değişir. Gezegenlerin yörüngeleri elips (ya da onun özel hali çember) olmalıdır, çünkü gezegenler tekrar tekrar aynı yörüngede dönerler. Fakat güneş sistemine bir kez girip çıkan kuyruklu yıldızlar parabol veya hiperbol şeklinde yörüngeler izleyebilirler. İncelenen bir gök cismi için e'nin değerini gözlem yapmadan bilmek imkânsızdır, çünkü yukarıdaki hesaplarda e matematiksel olarak herhangi bir pozitif sabit olabilir. Böylece Kepler'in birinci kanunu **K1**'in kalan kısmını da elde etmiş olduk.

Burada merak edilebilecek bir nokta gezegenlerin yörüngelerinin neden çember olmadığı. Bu sorunun cevabı gene dışmerkezlilik kavramında yatıyor. (17)'ye dikkatlice bakarsak yörüngelerin şeklini belirleyenin e sayısı olduğunu görürüz. $e = 0$ ise yörünge çember, $0 < e < 1$ ise elips, $e = 1$ ise parabol ve $e > 1$ ise hiperboldür. Yani yörüngenin çember olması bir tek e değeri ile mümkünken, elips olması 0 ile 1 arasındaki sonsuz sayıdaki e değeri ile gerçekleşir. Yörünge herhangi bir anda çember olsa bile, en ufak bir etki (meteor çarpması, hatta uzun vadede güneşten gelen ışıma) gezegenin hızı ve/veya kütlesini değiştirir ve gezegen farklı bir yörüngeye oturur. Yeni yörüngenin çember olması olasılığı dışmerkezlilik nedeniyle sıfırdır. Etkiden önce yörüngesi elips olan bir gezegen, etkiden sonra (güneş sisteminden kopmamışsa) dışmerkezliliği başka fakat gene elips olan bir yörüngeye geçer. Güneş sisteminin oluşumundan bu yana geçen milyarlarca yılda gezegenlerin yörüngelerini elips yapacak yeteri kadar etki vardır. Gene aynı nedenden dolayı parabol yörünge olası değildir; en ufak etkide hiperbole ya da elipse dönüşür.

Gezegenin yörüngesinin asal eksen yarı uzunluğu ile yörüngesini tamamlamak için harcadığı süre arasındaki ilişki göstereceğimiz son şey. Artık yalnız elips ya da çember olan yörüngelerle ilgileneceğiz, çünkü hiperbol ve parabol için T anlamsız. Önce yörünge çemberse, denklemi

$$r = \frac{h^2}{GM}$$

halini alır ve sağ taraf gezegenin güneşe olan uzaklığı A'dır. Bunu h^2 için çözeriz. $2h$'nin güneşten gezegene olan vektörün alan süpürme hızı (8) olduğunu ve çember için $2hT = \pi a^2$ (14) yazılabildiğini hatırlayalım; T tabii ki periyottur. O zaman

$$\frac{A^3}{T^2} = \frac{A^3h^2}{4\pi^2A^4} = \frac{h^2}{4\pi^2A} = \frac{GMA}{4\pi^2A} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

sağlanır. Sağ taraf sabitler ve güneşin kütlesinin bileşimi olduğundan her gezegen için aynıdır. Yörünge gerçek bir elipsse, o zaman yörünge denkleminde

$$\frac{h^2}{GM} = ke$$

olmalıdır [**3**]; bunu h^2 için çözeriz. Gene (14)'ü ve (12)'yi hatırlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}\frac{A^3}{T^2} &= \frac{A^3h^2}{4\pi^2A^2B^2} = \frac{Ah^2}{4\pi^2B^2} = \frac{Ah^2}{4\pi^2Ake} \\ &= \frac{h^2}{4\pi^2ke} = \frac{GMke}{4\pi^2ke} = \frac{GM}{4\pi^2}\end{aligned} \tag{18}$$

sağlanır; yani bu sefer de bu oran her gezegen için aynıdır. Kepler'in üçüncü kanunu **K3**'ü de gösterdik.

F. Sayısal Büyüklükler

Yazının başlarında uzaklıkları hesaplayabildiğimizi söylemiştik. Gök cisimlerinin kütlelerini hesaplamaya gelince ise evrensel G sabitinin değerini bilmekten başka çare yok. G'nin değeri, kütlesi bilinen çok iri cisimlerin çekme güçleri laboratuvarda hassas olarak ölçülerek bulunur. Metre-kilogram-saniye birim sisteminde $G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2}$'dir.

Dünyanın günberi ve günöte uzaklıkları sırayla $r_b = 1.47 \times 10^{11}$ ve $r_ö = 1.52 \times 10^{11}$ metredir. (11)'den dünyanın yörüngesinin asal eksen yarı uzunluğu $A = 1.495 \times 10^{11}$ metre çıkar. (13)'ten dünyanın yörüngesinin dışmerkezliliğini $e = 0.0167$ olarak buluruz. Görüldüğü gibi dünyanın yörüngesi çembere çok yakındır. Gezegenlerden yörüngesinin dışmerkezliliği en büyük ikisi Pluton ve Merkür'dür; sırayla 0.2481 ve 0.2056 ile. Diğerlerininki hep 0.1'den küçüktür. Dünya yörüngesini 365.256 günde, yani $T = 3.1558 \times 10^7$ saniyede tamamlar. O zaman güneş sistemi için $A^3/T^2 = 3.355 \times 10^{18}\,\mathrm{m^3/s^2}$ elde ederiz. Diğer gezegenlerin "yıl"larını ölçüp bu oran sayesinde güneşe olan yaklaşık uzaklıklarını hesaplayabiliriz. Asıl ilginci (18)'den güneşin kütlesini $M = 1.99 \times 10^{30}$ kilogram olarak buluruz.

Dünyanın yörüngesindeki hızı yaklaşık

$$v = \frac{2\pi(1.495 \times 10^{11})}{3.1558 \times 10^{7}} = 3 \times 10^{4}\,\mathrm{m/s}$$

olur. (6)'dan dünyanın konum vektörünün alan süpürme hızının yaklaşık

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}(1.495 \times 10^{11})(3 \times 10^{4}) \\ &= 2.24 \times 10^{15}\,\mathrm{m^2/s}\end{aligned}$$

olduğu ortaya çıkar. Son iki hesapta kolaylık olsun diye dünyanın yörüngesini çember gibi düşündük ve ikincisinde $\dot{r} = 0$ aldık.

Dünyanın kütlesini hesaplamak için ise güneş ve dünya yerine dünya ve ayı koyarız ve $m = 5.975 \times 10^{24}$ kilogram buluruz. Ayın kütlesi de 7.354×10^{22} kilogramdır. Meraklısı için yaklaşık olarak, dünyanın çapı 1.28×10^{7} metre, ayın çapı 3.48×10^{6} metre, ayın dünyaya olan ortalama uzaklığı 3.8×10^{8} metre, ayın dünya çevresinde bir dönüş yapma süresi ise 2.36×10^{6} saniyedir.

G. Bir Düzeltme

Bütün bu yaptıklarımız aslında tam anlamıyla doğru değil, çünkü bazı küçük etkileri ihmal ettik. Örneğin güneşi O'da çakılı varsaydık; onu hareket edebilen bir cisim olarak görmedik. Yani aslında tek cisimli (gezegen) bir hareket sisteminin çözümünü bulduk. Halbuki Newton'ın kütle çekim kanunundan dolayı her bir gezegen de güneşi kendisine doğru çeker. Neyse ki bu etkiyi hesaba katmak kolay; bunu görelim [**4**].

Sabit bir O noktası alalım; $\mathbf{r}_1$ bu noktadan gezegene, $\mathbf{r}_2$ bu noktadan güneşe, $\mathbf{r}$ de gene güneşten gezegene giden vektör olsun. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ bağıntısı açıktır. Newton'ın kütle çekim kanunu ile ikinci kanununda kuvvet için verilen ifadeleri gezegen ve güneş için ayrı ayrı birbirine eşitlersek,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{b}_r \tag{19}$$

$$M\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = +\frac{GMm}{r^2}\mathbf{b}_r \tag{20}$$

buluruz. Bu iki denklemin taraf tarafa toplamı $m\ddot{\mathbf{r}}_1 + M\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}$ olur ve bu

$$m\dot{\mathbf{r}}_1 + M\dot{\mathbf{r}}_2 = \textbf{sabit}$$

verir. (İyi fizik bilenler için bu denklem, güneşle gezegenin toplam doğrusal momentumunun sabit olduğunun, yani sistemin doğrusal momentumunun *korunduğunun* ifadesidir.)

İki cismin kütle merkezinin konum vektörü $\mathbf{R}$,

$$(m + M)\mathbf{R} = m\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2$$

ile verilir. Bu eşitliği R için çözer ve onun zamana göre türevini alırsak,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}_1 + M\dot{\mathbf{r}}_2}{m + M} = \frac{\textbf{sabit}}{m + M} = \textbf{sabit}$$

olduğunu görürüz; yani kütle merkezi sabit hızla hareket eder. Gezegen veya güneş için bu söz konusu değildir. Koordinat sistemimizi kütle merkezi ile birlikte hareket edecek şekilde seçebiliriz. Hatta O noktasını kütle merkezi olarak alabiliriz. Vardığımız sonuç, güneşin ve gezegenin ortak kütle merkezleri etrafında döndükleridir. Aslında bu yapacağımız çok küçük bir düzeltme, çünkü güneş sisteminin kütle merkezi, güneşin dev boyutları ve kütlesi nedeniyle güneşin içinde bulunuyor!

(19) ve (20)'yi sırayla m ve M ile bölelim ve sonra birbirinden çıkartalım. O zaman

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)\frac{GMm}{r^2}\mathbf{b}_r$$

buluruz.

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}$$

koyarsak,

$$\mu\mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{b}_r$$

elde ederiz. μ'ya *indirgenmiş kütle* denir. μ, m'den de M'den de küçüktür. Fakat bu son denklem daha önce gezegenin hareket denklemi olan (16) ile hemen hemen aynı; tek fark sol tarafta m yerine μ bulunması. Başka bir deyişle, ikisi de hareket eden iki cisimli sistem μ yardımıyla tek cisimli bir sisteme indirgenmiş oldu. μ da m gibi bir sabit olduğundan, bu denklemin incelenmesi de (16) gibi aynı sonucu verecek; yani gezegenin güneşe göre bağıl hareketinin bir odağında güneşin bulunduğu koni kesiti biçimindeki bir yörüngede meydana geldiğini.

Kullandığımız diğer bir sadeleştirme, her defasında güneş ve yalnız bir gezegeni ele almaktı.

Tabii güneş sistemi çok daha karışık ve gezegenler, uydular, meteorlar, kuyruklu yıldızlar, ... birbirlerini kütleleri nedeniyle, aralarındaki uzaklığın karesinin tersiyle orantılı bir kuvvetle çekiyorlar. Ama ne yazık ki yalnızca güneş, dünya ve ayı hesaba katan bir inceleme bile bu yazının ve bu derginin amacını ve seviyesini çok aşan zorlukta matematiksel problemler doğuruyor; biz de bunları okuyucuya bırakıyoruz. Şunu söylemekle yetinelim. Birbirlerini kütle çekim kanununa göre çeken sadece üç cismin üç boyutlu uzaydaki hareketi (bu derginin daha önceki sayılarında bahsi geçen) *kaos* olayının ilk gözlendiği örnektir. Yani birbirlerine çok yakın yerlerde ve hızlarla harekete başlayan cisimlerin yörüngeleri tahmin edilemeyecek derecede birbirinden farklı olabilir.

KAYNAKÇA

[1] R. A. Adams, *Calculus: A Complete Course*, 3. baskı, Addison-Wesley, Don Mills, 1995.

[2] H. T. Kaptanoğlu, *Koninin Kesitleri (I)*, *Matematik Dünyası*, **6**, sayı 4, 1–7 (1996).

[3] H. T. Kaptanoğlu, *Koninin Kesitleri (II)*, *Matematik Dünyası*, **6**, sayı 5, 1–9 (1996).

[4] C. Kittel, W. D. Knight & M. A. Ruderman, *Mechanics: Berkeley Physics Course—Volume 1*, McGraw-Hill, New York, 1965.