GEZEGENLERİN HAREKETİ (I)

H. Turgay Kaptanoğlu *

Yukarıdaki başlık, yazının bir fizik ya da astronomi dergisinde yayımlanması gerektiğini düşündürebilir. Yazının temel eksenini oluşturan Kepler kanunları ile Newton'ın kütle çekim kanunu kendi başlarına astronomi ve fiziğin konularıdır da. Bu yazıda inceleyeceğimiz bu iki kanun sistemi arasındaki ilişkiler ise tamamen matematik metotlarıyla olacak. Bu da matematiğin diğer bilimler için ne kadar vazgeçilmez olduğunu bir daha gözler önüne serecek.

A. Tarih

Tarih öncesi zamanlardan beri insanlar güneşin, ayın ve gökte sabit olmayan yıldızlar gibi görünen gezegenlerin hareketlerini incelediler. Mezopotamya ve Mısır uygarlıklarının yaptığı ayrıntılı gözlemler eski Yunan ve Roma çağlarında geliştirildi ve gezegenlerin hareketini tarif eden teoriler ortaya atıldı. İlk teorilerde hep dünya merkezdeydi; güneş, ay ve gezegenler onun etrafında bir yörüngede dönerlerdi, çünkü insanın evrenin merkezinde olması gerrektiğine inanılıyordu. En mükemmel eğri o çağlarda bir çember olarak düşünülüyordu, halbuki gezegenlerin yörüngelerinin dünyadan bakıldığında çember olmadığı apaçıktı. O zaman güneş sistemindeki cisimlerin dünyanın çevresinde merkezleri sabit çemberler üzerinde dolanan daha küçük çemberlerden (*dış çemberler*) oluşan yörüngelerde döndükleri varsayıldı. Bu teori İskenderiyeli Batlamyus (Claudius Ptolemy) (100(?)–168) tarafından ay tutulmalarını bir-iki saat farkla tahmin edebilecek derecede geliştirildi. Halbuki yüzyıllar önce eski Yunanlı Aristarhus (İ.Ö. 310–230) dünyanın ve gezegenlerin güneşin, ayın da dünyanın çevresinde döndüğünü, yıldızların görünen hareketinin dünyanın kendi ekseni etrafında dönmesi nedeniyle olduğunu söylemişti. Ancak bu görüşler yanlış temellere dayanan Aristo fiziğiyle çeliştiğinden rağbet görmemişti. Aristarhus, dünya-güneş uzaklığının dünya-ay uzaklığına oranını da ilk hesaplayan kişiydi. Buna rağmen dünyanın evrenin merkezi olduğu inancı 15. yüzyıla kadar yaygın olarak devam etti.

Polonyalı Kopernik'e (Nicholas Copernicus) (1473–1543) gelinceye dek, güneş, ay ve o zamanlar bilinen beş gezegenin hareketlerini o zamanlar elde edilebilen hassaslıkla tarif etmek için gereken çember sayısı 77'ye yükselmişti. Kopernik, dünya merkezli sistemin doğruluğu konusunda şüpheye düşüp güneş merkezli bir sistem ve gene dış çemberlerden oluşan yörüngeler tasarladı; bu sefer 34 çember yetmişti. Bu sadeleştirme onu güneşin sistemin merkezi olduğuna iyice inandırdı. Üstelik güneşe dünyadan daha yakın olan gezegenlerle daha uzak olan gezegenleri farklı olarak görmek gerekmiyordu. Kopernik de Batlamyus gibi gezegenlerin hızını sabit olarak görmek istediğinden, sonradan güneşin tam merkezde değil de yakınında olduğunu söyledi.

Şimdiye kadarki birçok teorinin temel yanlışı, gözlenen hareketlere uyan teoriler geliştirmek yerine, bu hareketleri insanların inançlarına ve düşüncelerine uydurma çabasıydı. Ayrıca gezegenlerin neden bilinen şekilde hareket ettikleri konusunda mistik veya dini bir takım iddialardan başka açıklama getirilememişti.

Kopernik'in teorisini öğrenenlerden biri de Alman Johannes Kepler'di (1571–1630). Onun devrinde bilinen gezegen sayısı altıya çıkmıştı. Kepler önceleri eski Yunan'dan beri bilinen beş mükemmel cismin (dörtyüzlü, küp, sekizyüzlü, onikiyüzlü, yirmiyüzlü) aralarına yerleştirilmiş altı küre ile güneş sistemini açıklamaya çalıştı. Güneş merkezdeydi ve kürelerin yarıçapları gezegenlerin güneşe olan uzaklıklarıydı. Aslında dokuz gezegen olduğunu bilseydi ne yapardı acaba? Çünkü mükemmel cisimler tam beş tane. Tahmin edilebileceği gibi bu teorinin hataları o zamanların gözlemlerindeki hatalardan daha büyük çıktı.

Danimarkalı Tycho Brahe (1546–1601), eski çağlardan beri kullanılan verilerin yanlışlarla

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

dolu olduğunu ve daha hassas gözlemler yapılmadan gezegenlerin hareketi hakkında kesin bir yargıya varılamayacağını farkeden ilk kişiydi. Bunun üzerine Brahe onyıllar boyunca gök cisimlerini gözledi ve yılın değişik zamanlarında gezegenlerin gökteki yerini gösteren verileri kaydetti. Kepler de onun verileri olmadan gezegenlerin hareketini açıklayamayacağını anlayınca onun asistanı oldu ve Brahe'nin ölümünden sonra verileri onun diğer asistanından kaçırdı [**2**].

Bu verileri yıllarca inceleyen Kepler, ilk olarak gezegenlerin hareketinin inişli çıkışlı olmayıp birer düzlemde meydana geldiğini fark etti. Sonra gezegenlerin sabit hızlarla hareket ettikleri yanılgısını tamamen terketti. Yörüngelerin çember olmadığını da artık görüyordu. Ayrıntıları yanlış olsa da, güneşten yayılan bir kuvvetin buna yakalanan "tembel" gezegenleri yörüngelerinde hareket ettirdiği ve bu kuvvetin uzaklıkla azaldığı düşüncesine ulaştı yavaş yavaş. Bu ana fikirlerin ışığı altında uzun ve birbirini götüren yanlışlıklarla dolu hesapların sonucunda *Kepler kanunları* diye bilinen üç genel ilkeden aşağıdaki ikisini elde etti ve bunları 1609'da *Yeni Astronomi* adlı kitabında duyurdu.

(K1) Gezegenler güneşi içeren bir düzlemde hareket ederler ve yörüngeleri bir odağında güneşin bulunduğu birer elipstir.

(K2) Güneşten bir gezegene çizilen doğru parçası, eşit sürede eşit alan süpürür.

Kepler aslında kütle çekimi kavramına çok yaklaşmıştı. Bahsettiği kuvvet sayesinde, başka bir kuvvet olmasa, dünya ile ayın birer mıknatıs gibi birbirlerini çekeceğini söylüyordu kitabında. Üstelik bu kuvvet ışık gibi uzaklara yayılıyor ve bunun etkisine kapılan cisimleri hareket ettiriyordu. Kuvvet alanı ima eden bu fikirler, Newton'ın kütle çekimi için evrende her yeri kaplayan *esir* adlı maddeyi gerekli görmesinden çok daha moderndi [**2**].

Kepler 1618 yılında yayımlanan *Dünyanın Uyumu* adlı kitabında, mükemmellik arama tutkusuna geri döndü ve gezegenlerin hareketleri ile müzik ve notalar arasında ilişki kurmaya çalıştı. Gene de bu eserde uzun denemelerden sonra bulduğu önemli bir bilimsel sonuç vardı; üçüncü Kepler kanunu:

(K3) Bir gezegenin yörüngesinin asal eksen yarı uzunluğunun küpünün, gezegenin yörüngesinde bir tam dönüş yapma süresinin karesine oranı bütün gezegenler için aynıdır.

İtalyan Galileo Galilei (1564–1642), hareket kanunları için mistik veya estetik inançlar dışında fiziksel nedenler aradı ve modern bilim üzerinde derin etkiler yaptı. Uzaklık, zaman, hız, ivme, kuvvet, kütle gibi kavramlara açıklık getirdi. Teleskopu gök cisimlerine bakmak için kullanan ilk kişi oldu. Fakat ilginçtir, belki de dini otoritelerden çekindiği için, 1632'de hâlâ gezegen yörüngelerini dış çemberler olarak gören bir kitap yayımlıyordu [**2**]. Gezegenlerin hareketi ile ilgili modern görüşlerin genel kabul görmesi uzun zaman aldı. 18. yüzyılın ortalarında bile Avrupa'da dünya merkezli sisteme göre ayın ve gezegenlerin hareketini anlatan kitaplar yazılıyordu.

İngiliz Isaac Newton (1642–1727), Cambridge Üniversitesi'ndeki öğrenciliği sırasında Galileo ve Kepler'in eserleriyle tanıştı. 1664–1665 yıllarındaki büyük veba salgınında üniversite kapanınca ailesinin köyünde tek başına zamanının önemli bilimsel problemleri üzerinde çalıştı ve bilim tarihinin en önemli sonuçlarından birkaçına ulaştı. Newton önce Kepler kanunlarının geçerli olması halinde güneşle gezegen arasında bir çekim kuvveti olması gerektiğini gösterdi. Sonra bu cins bir kuvvetin varlığı halinde Kepler kanunlarının tarif ettiği biçimde gezegen hareketi olacağını gösterdi. Daha sonraları merkezkaç kuvvetinden formülüyle Kepler kanunlarından çıkan sonuçları birleştirerek, *kütle çekim kanunu*'nun matematiksel ifadesini verebildi:

(G) Kütlesi olan iki cisim birbirlerini, her birinin kütlesiyle doğru orantılı ve aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı bir kuvvetle çekerler.

Bu kanunu, türevsel ve integral hesabı da içeren diğer buluşlarıyla birlikte, 1687 yılında *Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri* adlı bilim tarihinin en önemli eserinde yayımladı.

Newton'ın teorilerinin büyük başarılarından biri 1846'da Neptün gezegeninin keşfi oldu. Uranüs'ün hareketindeki bazı düzensizlikleri inceleyen İngiliz John Adams ve Fransız Urbain le Verrier, birbirlerinden bağımsız olarak daha uzakta onu çeken başka bir gezegen olması gerektiği sonucuna vardılar. Berlin rasathanesinin teleskopunu Le Verrier'nin hesaplarının işaret ettiği yöne çeviren Alman Johann Galle, o zamana kadar bilinmeyen Neptün'ü birkaç saatlik bir aramadan sonra gördü.

Daha sonraları, Merkür'ün yörüngesindeki küçük sapmaların Newton teorisiyle tamamen açıklanamayacağı anlaşıldı. Açıklama için iki buçuk yüzyıl sonra 20. yüzyılın başlarında Albert Einstein'ın (1879–1955) ortaya attığı *görecelilik teorisi* beklenecekti. Ancak Newton teorisinin gözlemlenenden belirgin farklar göstermesi, güneş gibi çok büyük bir kütleye Merkür kadar yakın gezegenlerde söz konusu. Bu tip etkiler dünya üzerindeki bizlerin hayatını veya gündelik mühendislik hesaplarını değiştirmiyor. Öte yandan kütle çekimi kavramı o derece temel bir kavram ki, görecelilik kuramı onu yanlışlamıyor, sadece genelliyor.

Osmanlılar'ın yeni astronomi ile tanışmaları çok sürmedi. 1660'larda eski ve yeni astronomi teorilerinden bahseden, fakat gezegenlerin hareketini gene de dünya merkezli sisteme dayandıran bir kitap Fransızca'dan çevrildi [**1**]. Bu çeviride merkezin dünya veya güneş olmasından teknik bir ayrıntı gibi bahsedildi. Çevirilen kitaplar takvim yapılmasında yararlı olan, ayın ve gezegenlerin hareketlerini tarif eden kitaplarla sınırlı kaldı hep; Kepler'in ve Newton'ın teorilerinden ve fiziksel açıklamalardan bahseden kitaplar hiç önemsenmedi. Bu çevirilerde eski ve yeni astronomi karşılaştırılsa da dini nedenlerle eski astronomiden yana tavır alındı daha çok. 19. yüzyılın başlarında bile dünya merkezli sisteme dayandırılan astronomi kitapları yazılıyordu. Ancak 1834'te İshak Efendi'nin (?–1836) yayımladığı *Mecmûa-i Ulûm-i Riyâziye* adlı kitapta, yeni astronomi tartışmasız bir biçimde savunulduğu gibi kütle çekim kanunu da ilk olarak yer aldı [**1**].

Dünyadan bakıldığında sabit görünen yıldızlar, ay ve güneş tutulmaları ve bunların süreleri, ve trigonometri gibi araçlarla dünyanın, ayın, güneşin yarıçaplarını ve birbirlerine olan ortalama uzaklıklarını bulmak mümkün. Antik çağlardan beri bu hesaplar yapılmış. Doğru değerlere varmak çok hassas gözlemler gerektiriyor, ama kaba hesapla bile iki uzaklığın oranını bilmek astronomiye büyük yararlar sağlıyor. Kepler de oldukça hatalı rakamlarla ise başlasa bile doğru sonuçlara varabildi.

Bu yazıda türevsel ve integral hesap ile vektörler kullanarak gözlemlenen gerçeklerin (Kepler kanunları) Newton'ın ikinci hareket kanunu (kuvvet eşittir kütle çarpı ivme) ile birlikte teoriyi (kütle çekim kanununu) doğurduğunu göreceğiz; sonra da teorinin matematik yardımıyla nasıl gözlemlenen gerçeği gerektirdiğini göreceğiz; bunlar yazının ikinci kısmında yer alacak. Bilimsel metot budur işte; inceleme bilimsellik kazandıran da inceleme metodudur. Deneysel bilgi bir düzen bulununcaya kadar incelenir; sonra bu düzeni açıklayacak bir kural ortaya atılır. Eğer bu kuralın sonucu olarak gözlenen elde edilmezse, gözlenen olayı açıklayacak yeni kurallar aranır; ta ki olay açıklanana kadar. Newton kütle çekimiyle Kepler kanunları arasında ilişki kurduğunda türev veya integral kullanmamıştı aslında; fakat kullanmak işimizi kolaylaştırıyor; vektörler ise o dönemde hayal bile edilmiyordu. Biz önce vektörlerle ilgili ihtiyacımız kadar bilgiyi özetleyeceğiz.

B. Vektörler

Kütle gibi yalnız büyüklüğü olan çoklukları göstermek için gerçel sayıları kullanırız. Birim büyüklük kararlaştırıldıktan sonra bir tek sayı bir cismin kütlesini belirtmeye yeter. Hız ve kuvvet gibi çoklukların ise hem büyüklükleri hem de yönleri var. Bir cismin ne yöne gittiği veya onun ne yönde çekildiği de belirtilmeli. Bu çoklukları göstermenin akla hemen gelebilecek bir yolu oklar kullanmak. Okun uzunluğu çokluğun büyüklüğünü, işaret ettiği yön ise çokluğun yönünü bildirir. Biraz daha matematiksel düşünerek, ok yerine *yönlü doğru parçası* diyeceğiz. Ayrıca düzlemde veya uzayda bulundukları yer farklı olsa da uzunluğu ve yönü aynı olan bütün doğru parçalarını eşdeğer sayacağız, çünkü dediğimiz gibi önemli olan yön ve büyüklük, bulunulan yer değil. Düzlemde veya uzayda bu denklik altındaki yönlü doğru parçalarına *vektör* denir. Vektörleri elle yazarken genellikle üzerlerine bir ok koyarız: $\vec{v}$. Basılı yazılarda ise çoğunlukla koyu yazılan harfler kullanılır: $\mathbf{v}$.

Bir vektörü bir s gerçel sayısıyla çarpabiliriz ve sonuçta aynı doğrultuda ve uzunluğu $|s|$ oranında artmış (veya azalmış) başka bir vektör elde ederiz; sayı pozitifse yön korunur, negatifse tersine döner. Birbirlerinin bir gerçel sayı ile çarpımı olarak yazılabilen vektörlere *paralel* vektörler denir. Vektörler toplanabilir de. İki vektörü, yönlerini ve uzunluklarını değiştirmeden kaydırarak dip dibe koyarız ve bu vektörleri kenar kabul eden paralelkenarı çizeriz. Paralelkenarın, vektörlerin dip noktalarından başlayan ve ucu karşı köşedeki yönlü köşegeni, iki vektörün toplamıdır. Bir vektörü sıfırla çarptığımızda elde ettiğimiz, uzunluğu sıfır ve yönü olmayan vektöre *sıfır vektörü* denir ve bunun başka bir vektörle toplandığında hiçbir etkisi yoktur. Bir vektörü başka bir vektörden çıkartmak demek, -1 ile çarpımını öbür vektöre eklemek demektir.

Boyu 1 olan her vektöre *birim vektör* adı verilir. Uzayda pozitif x, y, z yönündeki birim vektörler $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ olarak adlandırılırlar. $\mathbf{i}$ yönünde a, $\mathbf{j}$ yönünde b ve $\mathbf{k}$ yönünde c uzunluğunda üç vektörün toplamı olan $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ vektörü, üç vektörün *bileşke*sidir; üç vektörün her biri de $\mathbf{v}$'nin *vektör bileşeni*dir. a, b, c sayılarına ise $\mathbf{v}$'nin *bileşen*leri diyeceğiz. Tersine, verilen her $\mathbf{v}$ vektörünü, x, y, z eksenlerine paralel doğrular yardımıyla $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bileşenlerine ayırabiliriz. Bileşenlerin üstünde durmamızın nedeni, vektörleri toplama, çıkarma, gerçel sayılarla çarpma işlemlerini, vektörlerin her bir bileşeni üzerinde uygulamanın yetmesi. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ve s bir gerçel sayı ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\alpha + a)\mathbf{i} + (\beta + b)\mathbf{j} + (\gamma + c)\mathbf{k} \\ s\mathbf{v} &= (sa)\mathbf{i} + (sa)\mathbf{j} + (sa)\mathbf{k} \end{aligned}$$

olur.

Bir $\mathbf{v}$ vektörünün *büyüklüğü*nü (boyunu, uzunluğunu) $|\mathbf{v}|$ veya v ile göstereceğiz. $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ şeklinde verilmiş bir vektörün uzunluğunu, bir dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğunu hesapladığımız yöntemle

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

olarak elde ederiz. Bir $\mathbf{v}$ vektörüyle aynı yönde bir birim vektör ($\mathbf{b_v}$) elde etmek için $\mathbf{v}$'yi boyuna böleriz, yani $1/v$ ile çarparız:

$$\mathbf{b_v} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{v}\mathbf{v}.$$

Böylece her vektörü, uzunluğuna eşit bir gerçel sayı ile aynı yöndeki bir birim vektörün çarpımı olarak yazabiliriz:

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\mathbf{b_v} = v\mathbf{b_v}.$$

Henüz iki vektörün çarpımı gibi bir kavramdan söz etmedik, çünkü bu iki sayıyı çarpmak gibi basit değil ve birkaç değişik çarpım var. İki vektörün *nokta çarpımı*,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta = uv\cos\theta$$

olarak tanımlanır; burada θ, vektörler dip dibe dokunduklarında, aralarındaki açıların küçüğüdür; yani $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ alırız. Görüldüğü gibi nokta çarpımı bir gerçel sayı verir. $\mathbf{v}$'nin kendisiyle nokta çarpımından

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

çıkar.

İki vektörün arasındaki açı dik açı ise, nokta çarpımları sıfırdır, çünkü $\cos 90^\circ = 0$'dır ve başka bir θ için bu sağlanmaz. Ayrıca $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ birim vektörlerinin kendileriyle nokta çarpımları 1, diğerleriyle nokta çarpımları 0'dır. O zaman bileşenler cinsinden

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

elde ederiz. Bir vektörün $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ile nokta çarpımı onun bileşenlerini verir: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = a$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = b$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = c$. Nokta çarpımının tanımını iki vektör arasındaki açıyı bulmak için de kullanabiliriz. Nokta çarpımının değişme ve birleşme özellikleri vardır. Ayrıca gerçel sayılarla çarpma ile yer değiştirebilir ve toplama üzerine dağıtılabilir.

İki vektörü birbiriyle çarpmanın bir başka yolu *çapraz çarpım*dır ve

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|(\sin\theta)\mathbf{n} = uv(\sin\theta)\mathbf{n}$$

ile tanımlanır. Burada θ gene vektörler arasındaki küçük açı, $\mathbf{n}$ ise hem $\mathbf{u}$ hem de $\mathbf{v}$'ye dik bir birim vektördür. $\mathbf{n}$'nin yönü *sağ el kuralı* ile belirlenir: sağ elin dört parmağı $\mathbf{u}$'dan $\mathbf{v}$'ye doğru kapanıyorsa, baş parmak $\mathbf{n}$'nin yönünü işaret eder. Bu kural sayesinde çapraz çarpımın değişme özelliğinin olmadığını, fakat

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$$

eşitliğini sağladığını görürüz. Çapraz çarpımın birleşme özelliği de yoktur. Bunun örneğini bulmayı okuyucuya bırakıyoruz. Gene de çapraz çarpım gerçel sayılarla çarpma ile yer değiştirebilir ve toplama üzerine dağıtılabilir.

Paralel vektörlerin ve sadece onların birbirleriyle çapraz çarpımları $\mathbf{0}$'dır (çünkü $\sin 0° = \sin 180° = 0$); dolayısıyla her vektörün kendisiyle çapraz çarpımı da. Birim vektörler arasında aşağıdaki eşitlikler de geçerlidir:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Buradan bileşenler cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} = {} & (\beta c - \gamma b)\mathbf{i} \\ & + (\gamma a - \alpha c)\mathbf{j} + (\alpha b - \beta a)\mathbf{k} \end{aligned}$$

elde ederiz. (Bunu kısaca sembolik olarak

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

determinantı şeklinde de yazmak mümkündür, ama biz bu yazılımı hiç kullanmayacağız.) çapraz çarpım dikkat edileceği üzere bir vektör verir ve $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektörü $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin belirlediği düzleme diktir.

Vektörlerin birbirleriyle olan çarpımlarını gerçel sayıların çarpımları gibi görmek yanıltıcı sonuçlara yol açabilir. Gerçel sayılarda $p \neq 0$ ise, $pr = ps$ denkleminden $r = s$ çıkar. Fakat vektörlerde $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2$ ise, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ diyemeyiz. Gene $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_2$ ise, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ diyemeyiz. Buna uygun örnekleri bulmayı okuyuculara bırakıyoruz.

Vektörler, uzaydaki doğru ve düzlemlerin denklemlerini yazmada, bunların kesişim noktalarını ya da birbirlerine veya bir noktaya olan uzaklıklarını bulmada çok yararlıdırlar ve basit formüller verirler. Konumuzun dışında kaldığı için hiç anlatmayacağız.

Düzlemdeki vektörler için de yukarıda anlattıklarımızın hemen hemen hepsi geçerlidir. Vektörleri bileşenleri cinsinden yazdığımızda $\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ bileşenlerini kullanırız yalnızca; $\mathbf{k}$ bileşenleri 0'dır. Yani aslında işler daha kolaydır. Bir fark çapraz çarpımda ortaya çıkar. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ düzlemdeyken, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'nin her ikisine de dik olması gerekir; o zaman da $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ düzlemin dışında bir vektördür. Başka bir deyişle, düzlemde kalarak çapraz çarpım tanımlamak imkânsızdır.

C. Konum, Hız ve İvme Vektörleri

$O(0,0,0)$ noktasını *başnokta* diye adlandırıyoruz. Şimdi uzaydaki noktaları da birer vektör olarak düşüneceğiz. N noktasını dibi başnoktada ve ucu N'de olan $\overrightarrow{ON}$ vektörüyle özdeşleştirebiliriz. Yaptığımız, $N(x, y, z)$ noktasıyla $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{r}$ vektörü arasında bir birebir eşleme kurmakla aynı şey. $\mathbf{r}$ vektörüne *konum vektörü* adı verilir. N noktası bir cismin bulunduğu yerse, $\mathbf{r}$ vektörü başnoktadan o cismin bulunduğu yere işaret eder. Cisim hareket ediyorsa, N ve $\mathbf{r}$ zamana bağlı olarak değişir; yani zamanın bir fonksiyonudur; tabii x, y, z de. Zamanı t ile gösterirsek, bu durumda

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

yazarız. $\mathbf{r}$, t'nin yeteri kadar türevlenebilir bir fonksiyonuysa, birinci türevine *hız vektörü* $\mathbf{v}$, ikinci türevine de *ivme vektörü* $\mathbf{a}$ adı verilir. Yani

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \\ \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k} \end{aligned}$$

olur. Hızın büyüklüğüne *sürat* diyelim; yani

$$\text{sürat} = |\mathbf{v}| = v.$$

Sabit sürat altında bile hız değişebilir: yön değiştirerek.

Bir cisim uzayda veya düzlemde bir eğri boyunca hareket eder. Konum vektörü $\mathbf{r}$'nin ucu da bu eğri üzerinde dolanır. $\mathbf{r}(t)$'yi veren formül aynı zamanda bu eğrinin de denklemidir. Hız vektörü $\mathbf{v}$'nin yönü cismin gittiği yönü gösterdiğinden, $\mathbf{v}(t)$ eğriye $\mathbf{r}(t)$ noktasında teğettir.

Hareket sırasında cismin O'ya olan uzaklığı, yani $|\mathbf{r}(t)| = r(t)$ sabitse, örneğin bir küre yüzeyinde veya düzlemde bir çember üzerinde harekette, konum da hız da sabit olmayabilir. Ama

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = \text{sabit}$$

eşitliğinde çarpım kuralıyla türev alırsak,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 0 \\ 2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 0 \\ \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu, konum ve hız vektörlerinin hep birbirlerine dik olması demektir. Buna benzer bir şekilde, eğer hareket boyunca sürat sabitse, hız ve ivme vektörleri birbirlerine diktir.

Hareket bir düzlemde meydana geliyorsa, $\mathbf{k}$ bileşenlerine gerek kalmaz. O zaman konum vektörünün boyu $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, açıkca kutupsal koordinatların r'sidir. Kutupsal koordinatlarda x'in ve y'nin r ve θ cinsinden nasıl yazıldığını hatırlarsak,

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j} \tag{1}$$

yazılabildiğini görürüz. Bir noktanın etrafında dönerek yapılan harekette, konum, hız ve ivme vektörlerini Kartezyen koordinatlara sıkı sıkıya bağlı $\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ cinsinden yazmak yerine, kutupsal koordinatlardan elde edilen başka iki birim vektör cinsinden yazmak büyük kolaylık sağlar. Bu iki birim vektör, r ve θ yönündeki $\mathbf{b}_r$ ve $\mathbf{b}_\theta$ birim vektörleridir. Şimdi bunların $\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ ile aralarındaki ilişkiyi yazalım. $\mathbf{r}$'yi uzunluğu olan r'ye bölersek

$$\mathbf{b}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

buluruz. Bu vektörü saat yönünün aksi yönde 90^0 döndürürsek, boyu değişmez ve θ'nın arttığı yönü gösterir:

$$\mathbf{b}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}.$$

$\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$'den farklı olarak, $\mathbf{b}_r$ ve $\mathbf{b}_\theta$'nın sabit birer yönleri yoktur; θ'ya bağlı olarak değişirler; ama r'den bağımsızdırlar. Ama

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_r \times \mathbf{b}_\theta &= (\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \times (-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}) \\ &= \cos^2\theta(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) - \sin^2\theta(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) = \mathbf{k} \end{aligned} \tag{2}$$

hep sabittir.

Doğrudan hesapla

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}_r}{d\theta} &= -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} = \mathbf{b}_\theta \\ \frac{d\mathbf{b}_\theta}{d\theta} &= -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j} = -\mathbf{b}_r \end{aligned}$$

olduğunu da görürüz. Zamana göre türevi değişkenin üzerindeki bir nokta ile gösterelim. Zincir kuralı yardımıyla

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}_r &= \frac{d\mathbf{b}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{b}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot\theta\mathbf{b}_\theta \\ \dot{\mathbf{b}}_\theta &= \frac{d\mathbf{b}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{b}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot\theta\mathbf{b}_r \end{aligned}$$

da çıkar.

Konum, hız ve ivme vektörlerini artık $\mathbf{b}_r$ ve $\mathbf{b}_\theta$ cinsinden yazabiliriz.

$$\mathbf{r} = r\mathbf{b}_r \tag{3}$$

olduğu görülüyor. Diğerleri de çarpım kuralıyla türev alarak kolaylıkla hesaplanır:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{b}_r) = \dot r\mathbf{b}_r + r\dot\theta\mathbf{b}_\theta, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot r\mathbf{b}_r + r\dot\theta\mathbf{b}_\theta) \\ &= \ddot r\mathbf{b}_r + \dot r\dot\theta\mathbf{b}_\theta + \dot r\dot\theta\mathbf{b}_\theta + r\ddot\theta\mathbf{b}_\theta - r\dot\theta\dot\theta\mathbf{b}_r \\ &= (\ddot r - r\dot\theta^2)\mathbf{b}_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\mathbf{b}_\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Ç. Kutupsal Koordinatlardan Bir Formül

Kutupsal koordinatlarda $r = f(\theta)$ fonksiyonuyla verilen bir eğri ile O arasında kalan bölgeyi düşünelim. öyle ki bu bölge sabit bir φ açısıyla verilen ışında başlasın ve değişken bir θ açısına kadar devam etsin. Şimdi amacımız, θ değiştikçe bu bölgenin alanı A'nın değişim hızı için bir formül geliştirmek. θ, diyelim, Δt zamanı süresince $\Delta\theta$ kadar değişsin; aynı sürede alandaki değişikliğe de ΔA diyelim. Değişiklikler ufaksa r değeri, θ ile $\theta + \Delta\theta$ arasında yaklaşık olarak sabit kalacaktır. Bu ise bölgeye daire kesmesi gibi dilim eklenmesi demektir. Tüm dairenin açısal genişliği 2π olduğundan, dairenin alanıyla oranlayarak,

$$\Delta A \approx \frac{\Delta\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$$

yazabiliriz. Her iki tarafı Δt'ye böler ve $\Delta t \to 0$ iken limit alırsak,

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

eşitliğini elde ederiz.

KAYNAKÇA

[1] E. İhsanoğlu, *Büyük Cihad'dan Frenk Fodulluğuna*, İletişim, İstanbul, 1996.

[2] A. Koestler, *The Watershed: A Biography of Johannes Kepler*, Doubleday Anchor, Garden City, 1960.