

1 Elektron Fonon Etkileşmeleri

Polar elektron-fonon etkileşmesinde elektron öz enerjisi, $g_q \epsilon \mathfrak{R}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\Sigma(k, w) &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{q}} (\vec{q}_q)^2 \frac{1}{\beta} \sum_{w_n} G^{(0)}(k+q, ip_n + iw_n) D^{(0)}(q, iw_n) \\ &= \frac{N_q + n_F(\xi_{k+q})}{ip_n - \xi_{k+q} + w_q} + \frac{N_q + 1 - n_F(\xi_{k+q})}{ip_n - \xi_{k+q} - w_q}\end{aligned}\quad (1)$$

Burada, $\sum_{\vec{q}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{q}$ kullanılarak,

$$\Sigma(k, ip_n) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} (\vec{g}_q)^2 \left[\frac{N_q + n_F(\xi_{k+q})}{ip_n - \xi_{k+q} + w_q} + \frac{N_q + 1 - n_F(\xi_{k+q})}{ip_n - \xi_{k+q} - w_q} \right]\quad (2)$$

Bu ifade, elektron - fonon etkileşmesinde (boyuna, longitudinal) elektron özenerjisidir. Bu yüzden $w_q \rightarrow w_{LO}$ yazılabilir. Ayrıca $ip_n \rightarrow w + i\delta$ 'dır.

Elektron - fonon etkileşimi, Coulomb etkileşiminin bir türevidir ve $r_s \gg 1$ limitinde Coulomb etkileşimi önem taşır (büyük olur). Alüminyum için

$$\begin{aligned}r_s &= \left[\frac{4\pi a_0^3 \bar{n}}{3} \right]^{1/3} \rightarrow 4 - 5 \quad \bar{n}, \text{yaklaşık olarak } \rightarrow 10^{23} \text{cm}^{-3} \\ a_0 &= \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{m e^2} = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{m e^2} \cdot \frac{c^2}{c^2} = \left(\frac{\hbar c}{e^2} \right) \frac{\hbar c}{m c^2} = \frac{1}{137} \cdot \frac{2000 \text{eV} - A}{0,5 \text{MeV}} = 0.57A\end{aligned}$$

GaAs için

$$a_0 = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{m^* e^2} = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{0.1 m^* e^2} \Rightarrow r_s = 1 \quad \bar{n}, \text{yaklaşık olarak } \rightarrow 10^{18-19} \text{cm}^{-3}$$

Elektron - fonon etkileşimleri için r_s parametresi önemlidir. $r_s < 1$ ise elektron fonon etkileşmeleri ihmal edilebilir. Analitik süreklilik sonrası self enerjinin imajiner kısmına bakalım;

$$-\frac{1}{\pi} \text{Im}\Sigma(\vec{k}, w) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} g_{\vec{q}-\vec{k}}^2 [n_F(\xi_q) \delta(w - \xi_q + w_{LO}) + (1 - n_F(\xi_q)) \delta(w - \xi_q - w_{LO})]\quad (3)$$

$T = 0$ sıcaklığında $N_q = 0$ olacağından $\vec{q} \rightarrow \vec{q} - \vec{k}$ indis değişimi yapılır ve momentum dağılımı sınırsız alınabilir. w enerjisini kimyasal potansiyele göre ölçtüğümüzden; $w = w' - \mu$

$$E_q = \frac{q^2}{2m} - \mu$$

$$\xi_q = w + w_{LO} \quad \Rightarrow \quad w + w_{LO} < 0$$

$$\xi_q = w - w_{LO} \quad \Rightarrow \quad w - w_{LO} > 0$$

Optik fonon frekansı 0.1meV ve Fermi enerjisi $E_F = 1 - 5 \text{eV}$ civarında olduğundan bu, bir pertürbasyon olarak kabul edilebilir (Migdal Teoremi).

$$w_q \rightarrow w_{LO} = c_s q |_{\pi/a} = 100 - 200 \text{meV}$$

$$\text{Im}\Sigma = 0, \quad \text{Re}\Sigma \neq 0$$

Elektron, elektron olarak kalmaya devam ediyor, ancak enerjisi renormalize oluyor.

$$\xi'_p = \xi_p + \text{Re}\Sigma(p, \xi_p)\quad (4)$$

Bu ifade, "Rayleigh-Scrodinger" pertürbasyon teorisi olarak bilinir.

$$E'_p - \mu' = E_p - \mu + \text{Re}(p, E_p - \mu)\quad (5)$$

Eğer sonlu sıcaklıklara bakacak olursak (3) eşitliğinde

$$[n_F(\xi_q) + N_{q-k}]\delta(\dots) + [1 - n_F(\xi_q) + N_{q-k}]\delta(\dots) \dots$$

olacaktır.

$$N_q = \frac{1}{e^{\beta w_q} - 1} = \frac{1}{e^{\beta w_{LO}} - 1} = N_0$$

$$\int d\Omega g_{|q-k|}^2 = G_{eff}^2(q, k) \quad (6)$$

olsun. Bu ifade daha sonra hesaplanacaktır. (3) eşitliğinin yeniden düzenlenmesi ile;

$$-\frac{1}{\pi} Im\Sigma = \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} G_{eff}^2(q, k) [n_F(\xi_q)\delta(w' - E_q + w_{LO}) + (1 - n_F(\xi_q))\delta(w' - E_q - w_{LO})] \quad (7)$$

$|w| < w_{LO}$ ise, elektron-fonon etkileşimi sırasında elektron bir fonon yayamaz, bu nedenle elektron-fonon etkileşimleri daha yüksek terimlerden gelir. Bu durumda $Im\Sigma = 0$ çıkar. Fermi seviyesinin w_D kadar üstünde ve altında elektronlar hala, elektron olmaya devam ediyor.

$G_{eff}^2(q, k)$ Hesabı:

$$G_{eff}^2(q, k) = \int d\Omega g_{|q-k|}^2 = C^2 \int d\Omega \frac{1}{q^2 + k^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{q}} = C^2 \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta_q) \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_q \frac{1}{q^2 + k^2 - 2kq \cdot \cos\phi_q} \quad (8)$$

$$g_q = \frac{C}{q}$$

1.1 Polar elektron-fonon

$$D = 0 \quad \vec{E} = 4\pi\vec{P}$$

$$C^2 = 4\pi\alpha\hbar \frac{(\hbar w_0)^{3/2}}{\sqrt{2m}}$$

Burada α , boyutsuz elektron-fonon kuplaj sabitidir;

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{m}{2\hbar w_{LO}} \right)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_\infty} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right)$$

Burada ise, ε_0 ve ε_∞ , sırası ile, $w \rightarrow 0$ ve $w \rightarrow \infty$ limitlerindeki değerlerdir. (8) ifadesini hesaplamak için,

$$2\pi C^2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{q^2 + k^2 - 2kqx}$$

integraline bakmamız gerekir. Burada $-2qkx = u \Rightarrow du = -2qkdx$ değişken dönüşümü ile,

$$\frac{2\pi C^2}{-2qk} \int \frac{du}{q^2 + k^2 + u} = \frac{-\pi C^2}{qk} \ln \left| \frac{q^2 + k^2 - 2qk}{q^2 + k^2 + 2qk} \right|$$

O halde, $G_{eff}^2(q, k)$ için,

$$G_{eff}^2(q, k) = \frac{2\pi C^2}{qk} \ln \left| \frac{q+k}{q-k} \right| \quad (9)$$

elde edilebilir. Burada da,

$$k \rightarrow 0 \text{ limitinde } G_{eff}^2(q, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \ln \left| \frac{q+k}{q-k} \right| = \frac{2}{q}$$

Bu durumda elektron oz enerjisinin imajiner kısmını yazabiliriz:

$$-\frac{1}{\pi} \int \frac{q dq}{(2\pi)^2} \frac{C^2}{k} \ln \left| \frac{q+k}{q-k} \right| [n_F(\xi_q)\delta(w' - E_q + w_{LO}) + (1 - n_F(\xi_q))\delta(w' - E_q - w_{LO})] \quad (10)$$

Buradan hareketle, özenerjinin reel kısmını hesaplayabilmek için "Kramers-Kroning" eşitlikleri kullanılabilir.

$$Re\Sigma(\vec{k}, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw'}{\pi} \frac{Im\Sigma(k, w')}{w' - w} \quad (11)$$

Öz enerjiyi, kompleks uzay ve reel frekansa hesaplamak istersek;

$$\Sigma(\vec{k}, w) = \int \frac{dq}{(2\pi)^3} \left[\frac{N_q + n_F(\xi_{k+q})}{w - \xi_{k+q} + w_{LO} + i\delta} + \frac{N_q + 1 - n_F(\xi_{k+q})}{w - \xi_{k+q} - w_{LO} + i\delta} \right] \quad (12)$$

$N_0 \rightarrow 0$, yani $T = 0$ durumunda sonucu G_{eff} cinsinden yazarsak;

$$Re\Sigma(\vec{k}, w) = \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} G_{eff}^2(q - k, k) \left[n_F(\xi_q) \left[\frac{1}{w - \xi_q + w_{LO}} - \frac{1}{w - \xi_q - w_{LO}} \right] + \frac{1}{w - \xi_q - w_{LO}} \right] \quad (13)$$

Burada,

$$T_1 = n_F(\xi_q) \frac{1}{w - \xi_q + w_{LO}}, \quad T_2 = n_F(\xi_q) \frac{1}{w - \xi_q - w_{LO}}$$

$$T_3 = \frac{1}{w - \xi_q - w_{LO}}$$

olsun. İstenmeyen terim T_3 'dur. Önce bu terimi hesaplayalım. Özenerjiye gelen sabit terim kimyasal potansiyeli renormalize eder.

T_3 hesabı:

$$Re\Sigma_{T_3} = \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} \frac{2\pi C^2}{|q - k|k} \ln \left| \frac{q}{q - 2k} \right| \cdot \frac{1}{w - \xi_q - w_{LO}} \quad (14)$$

Burada; $w - \xi_q - w_{LO} = w - \frac{q^2}{2m} + \mu - w_{LO}$ dir. Self enerji hesabından, normalize olmuş tek parçacık enerjileri bulunabilir. Öz enerjinin reel kısımlarından $\xi'_p \rightarrow E'_p \rightarrow \mu'$ hesaplanabilirken, imajiner kısmından elektron yarıomurleri hesaplanabilir: τ_e^{-1} (scattering rate for electron-phonon).

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial k}, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial w} \Rightarrow w_{eff} \quad (15)$$

(14) esitliğinde, $w - \frac{q^2}{2m} + \mu - w_{LO}$ için,

$$w = 0 \quad w_{LO} \ll \mu \quad (\text{fonon enerjisi} < \mu) \Rightarrow -\frac{q^2}{2m} + \mu = -\left(\frac{q}{\sqrt{m}} + \sqrt{m}\right) \left(\frac{q}{\sqrt{m}} - \sqrt{m}\right)$$

$$Re\Sigma(\vec{k}, w) = \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^2} \frac{C^2}{qk} \ln \left| \frac{q+k}{q-k} \right| \cdot \left[[N_0 + n_F(\xi_q)] \frac{1}{\xi_q - w_{LO} - w} + [N_0 + 1 - n_F(\xi_q)] \frac{1}{\xi_q + w_{LO} - w} \right] \quad (16)$$

$$Re(\Sigma_{T_1} + \Sigma_{T_2} + \Sigma_{T_3}) = -\frac{C^2}{(2\pi)^2 k} \left[\int_0^{k_F} q dq \ln \left| \frac{q+k}{q-k} \right| \frac{1}{\xi_q - w_{LO} - w} + \int_{k_F}^{\infty} q dq \ln \left| \frac{q+k}{q-k} \right| \frac{1}{\xi_q + w_{LO} - w} \right] \quad (17)$$

$-w_{LO} \leq w \leq w_{LO}$

$$\xi'_p = E'_p - \mu' = E_p - \mu + Re\Sigma(\vec{p}, E_p - \mu)$$

$p \rightarrow 0$ için;

$$\mu' = \mu - Re\Sigma(\vec{0}, -\mu) \quad (18)$$

Not: İki elektron, pozitif enerjili bir fonon exchange ederek enerjilerini koruyorlarsa virtual process oluşur. Bu da negatif enerjilere ulaşılmasına neden olur. Burada enerji korunmaz.

1.2 Etkin kütle hesabı:

$\varepsilon_k \rightarrow$ tek elektron enerjisi olmak üzere;

$$\frac{m}{m^*} = \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \left[\frac{1 + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \text{Re}\Sigma(\vec{k}, w - \mu)}{1 - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \text{Re}\Sigma(\vec{k}, w - \mu)} \right]_{w \rightarrow \mu} \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \text{Re}\Sigma = (m/k) \frac{\partial}{\partial k} \text{Re}\Sigma, \quad \frac{\partial}{\partial w} \text{Re}\Sigma$$

$\frac{m}{m^*}$ için $k \rightarrow 0$ limitine bakarsak;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \text{Re}\Sigma(\vec{k}, w - \mu) &= (m/k) \frac{\partial}{\partial k} \text{Re}\Sigma \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{k} \ln \left| \frac{q+k}{q-k} \right| \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{1}{k} \left(1 + \frac{k}{q} + \frac{k^2}{2q^2} + \dots \right) - \left(1 - \frac{k}{q} + \frac{k^2}{2q^2} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{2}{q} + \frac{2}{3} \frac{k^2}{q^3} \right)_{k \rightarrow 0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

(19) eşitliğinde, paydaki türev 0 verdi.

$$\frac{m}{m^*} = \lim_{k \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \text{Re}\Sigma(\vec{k}, w - \mu) \right)^{-1}$$

hesaplanmalı. $T = 0$ için $N_0 = 0$ olup;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} \text{Re}\Sigma &= -\frac{C^2}{(2\pi)^2 k} \int_0^\infty q dq \ln \left| \frac{q+k}{q-k} \right| \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{n_F(\xi_q)}{\xi_q - w_0 - w} - \frac{n_F(\xi_q)}{\xi_q + w_0 - w} + \frac{1}{\xi_q + w_0 - w} \right] \\ &= -\frac{C^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq n_F(\xi_q) \left[\frac{1}{(\xi_q - w_{LO} - w)^2} - \frac{1}{(\xi_q + w_{LO} - w)^2} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$T = 0$ 'da en büyük katkı Fermi yüzeyi civarından gelecektir. Bu integrali kısmi integral yolu ile alabiliriz;

$$dv = \frac{1}{(\xi_q - w_{LO} - w)^2} \quad u = n_F$$

seçilerek,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial w} \text{Re}\Sigma \right]_{k \rightarrow 0, w \rightarrow -\mu} &= -\frac{C^2}{(2\pi)^2} \left\{ n_F(\xi_q) \int dq \left[\frac{1}{(\xi_q - w_{LO} - w)^2} - \frac{1}{(\xi_q + w_{LO} - w)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty dq \frac{\partial n_F}{\partial q} \left(\int_0^q dq \left[\frac{1}{(\xi_q - w_{LO} - w)^2} - \frac{1}{(\xi_q + w_{LO} - w)^2} \right] \right) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

(19) ifadesinde $w \rightarrow -\mu$,

$$\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon_q} \frac{\partial \varepsilon_q}{\partial q} \Rightarrow \frac{m}{q}$$

$$\frac{m}{q} \delta(\mu - \varepsilon_q) = \delta(q - k_F)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial w} \text{Re}\Sigma \right]_{k \rightarrow 0, w \rightarrow -\mu} = -\frac{4C^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{v_F w_{LO}} = -\lambda \rightarrow \infty \quad (23)$$

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \lambda \quad m^* > m \quad (24)$$

1.3 Bazı hesaplamalar:

$$v_F, \quad w_{LO} = 100meV, \quad m = 0.5meV$$

$$\begin{aligned} \lambda > 1 &\rightarrow \text{strong coupling} \\ \lambda < 1 &\rightarrow \text{weak coupling} \end{aligned}$$

Debye modelinde fonon frekansı, fonon sayısını sabit bırakan frekans demektir.

$$\begin{aligned} \hbar w_D = c_s \hbar k &= \frac{c_s}{c} (\hbar c) \frac{\pi}{a} = \frac{5000m/s}{3 \cdot 10^8 m/s} \cdot 2000eV \cdot \frac{\pi}{5\text{\AA}} = 250meV \\ E_{Ry} &= \frac{\hbar^2}{2ma_0^2}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \Rightarrow E_{Ry} = \frac{\hbar^2 m^2 e^4}{2m\hbar^4} = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6eV \end{aligned}$$

Boyutsuz parametrelerde çalışmak daha uygun olacağından; $\frac{c_s}{c} = 10^{-5}$ ve $\hbar = 1$;

$$\frac{w_D}{E_F} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{100} \right)$$

Fononlar, elektronlardan daha yavaşlar (adyabatik yaklaşım), bu durumda elektronlar fononlardan etkilenirler. Bunun tersi durumda ise fononlar elektronlardan etkilenmezler. Bu nedenle, elektron enerjisi renormalize olurken, fonon enerjisi renormalize olmaz.

$$\Sigma \rightarrow \left(\frac{w_0}{E_F} \right)^{1/2}$$

$$\Pi \Rightarrow \left(\frac{w_0}{E_F} \right) \rightarrow \Sigma\text{'ya göre küçük.}$$

Fonon-fonon etkileşimleri, yüksek mertebeden pertürbasyonlar olduklarından anharmonik etkiler oluştururlar.

2 Elektron-Fonon Etkileşimleri & Coulomb Etkileşimleri

Elde etmek istediğimiz $V_{ee}(\vec{q}, w)$.

$$\begin{aligned} &\sum_{k,q,\sigma} g_q c_{k+q,\sigma}^\dagger c_{k\sigma} (a_q + a_{-q}^\dagger) \\ &\Rightarrow \sum_q \Phi(\vec{q}) c_{k+q,\sigma}^\dagger c_{k\sigma} \end{aligned}$$

Coulomb alanı her yerde olduğundan kuantize etmek zorunda kalmayız. Etkin elektron fonon etkileşimini,

$$[(D_c + D_{ph}) + \Pi^{(0)}(D_c + D_{ph})^2 + (\Pi^{(0)})^2(D_c + D_{ph})^3 + \dots] \quad (25)$$

$$A = c_{k+q,\sigma}^\dagger c_{k'-q,\sigma'}^\dagger c_{k'\sigma'} c_{k\sigma}$$

$$[D_c + D_{ph}][1 + \Pi^{(0)}(D_c + D_{ph}) + (\Pi^{(0)})^2(D_c + D_{ph})^2 + \dots] \cdot A \quad (26)$$

$$H_{int} = \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} \frac{(D_c + D_{ph})(q, w)}{1 - \Pi^{(0)}(D_c + D_{ph})} c_{k+q,\sigma}^\dagger c_{k'-q,\sigma'}^\dagger c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} \quad (27)$$

Elektron gazı, fononları renormalize ediyor. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} V_{eff}(\vec{q}, w) &\neq V_{eff}^{ph}(\vec{q}, w) + V_{eff}^c(\vec{q}, w) \\ &= V_{eff}^c(\vec{q}, w) + \tilde{V}_{ph}(\vec{q}, w) \end{aligned} \quad (28)$$

Burada, $\tilde{V}_{ph}(\vec{q}, w)$, normalize olmuş fonon potansiyeli, $\varepsilon^L(\vec{q}, w)$, longitudinal dielektrik fonksiyonu olmak üzere, $V_{eff}^c(\vec{q}, w) = \frac{v_q^{(0)}(q)}{\varepsilon^L(\vec{q}, w)}$ 'dur.

$$\varepsilon^L(\vec{q}, w) = 1 - v_q^{(0)}\Pi^{(0)}(\vec{q}, w) \quad (29)$$

En hızlı normalize olan core elektronlarıdır. Uniform background'un dielektrik fonksiyonu ε_0 sabittir. Core elektronlarının etkisi ε_∞ olarak temsil edilir.

$$\varepsilon^L(\vec{q}, w) = \varepsilon_\infty \left[1 - \frac{v_q^{(0)}}{\varepsilon_\infty} \Pi^{(0)}(\vec{q}, w) \right] \quad (30)$$

$\frac{v_q^{(0)}}{\varepsilon_\infty} = v_q^\infty$ olmak üzere,

$$\frac{v_q^{(0)}}{\varepsilon^L(\vec{q}, w)} = V_{eff}^c(\vec{q}, w) = \frac{v_q^{(0)}}{\varepsilon_\infty [1 - v_q^{(\infty)} \Pi(\vec{q}, w)]} = \frac{v_q^{(\infty)}}{1 - v_q^{(\infty)} \Pi(\vec{q}, w)} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{ph}(q, w) &= V_{eff}^c(\vec{q}, w) - \frac{v_q^{(\infty)}}{1 - v_q^{(\infty)} \Pi(\vec{q}, w)} \\ &\frac{4\pi e^2}{q^2} \rightarrow \frac{4\pi e^2}{\varepsilon_\infty q^2} \end{aligned} \quad (32)$$

Coulomb ayarı kullanılırsa, (Coulomb ve relativistik ayarda denklemler birbirinden ayrılırlar.)

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \rho(r) \quad (33)$$

$$\nabla^2 D_c(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (34)$$

$$D_c(\vec{r}) \rightarrow D_c(\vec{q}) = \frac{4\pi}{q^2} = V_q^{(0)}$$

Relativistik ayar kullanılsa idi, ayar dönüşümü,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (35)$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho(r, t) \quad (36)$$

Bu durumda Coulomb propagatörü,

$$D_c(\vec{q}, w) = \frac{4\pi}{w^2 - q^2 c^2} \quad (37)$$

Dıştan bir pertürbasyon varsa

$$\nabla^2 \eta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = f(\vec{r}) \quad (38)$$

ifadesi, hareket denklemi olur. Işık hızının sonsuz alınabildiği tüm sistemlerde Coulomb ayarı kullanılabilir.

$$\frac{c_s}{c} = 10^{-5}, \quad \frac{c_F}{c} \sim 10^{-2} \Rightarrow \frac{c_s}{c_F} \sim 10^{-3}$$

ε_∞ , 1'e çok yakın olduğu için,

$$D_c \rightarrow v_q^{(0)} \Rightarrow H_{int} \quad \text{içindeki bölüm} = \frac{v_q^{(0)} + v_{ph}}{1 - \Pi^{(0)}(v_q^{(0)} + v_{ph})} = \frac{v_q^{(\infty)} + v_{ph}}{1 - \Pi^{(0)}(v_q^{(\infty)} + v_{ph})} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{ph}(\vec{q}, w) &= v_{eff}(\vec{q}, w) - \frac{v_q^{(\infty)}}{1 - v_q^{(\infty)} \Pi^{(0)}} \\ &= \frac{v_q^{(\infty)} + v_{ph}}{1 - \Pi^{(0)}(v_q^{(\infty)} + v_{ph})} - \frac{v_q^{(\infty)}}{1 - v_q^{(\infty)} \Pi^{(0)}} \end{aligned} \quad (40)$$

Burada, $\frac{v_q^{(\infty)}}{1-v_q^{(\infty)}\Pi^{(0)}}$, saf elektrostatik perdelemidir.

$$\varepsilon^L(q, w) = 1 - v_q^{(\infty)}\Pi^{(0)} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_T(q, w) &\neq \varepsilon_e^L(\vec{q}, w) + \varepsilon_{ph}^L(\vec{q}, w) \\ &= \frac{v_q^{(\infty)} + v_{ph}}{\varepsilon^L(\vec{q}, w) - \Pi^{(0)}v_{ph}} - \frac{v_q^{(\infty)}}{\varepsilon^L} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\varepsilon_T(q, w) = \frac{v_q^{(\infty)} + v_{ph}}{\varepsilon^L(\vec{q}, w) \left[1 - \frac{\Pi^0 v_{ph}}{\varepsilon^L} \right]} - \frac{v_q^{(\infty)}}{\varepsilon^L} \quad (43)$$

$$\tilde{v}_{ph}(q, w) = \frac{v_{ph}(q, w)}{\varepsilon^2(\vec{q}, w) \left[1 - \frac{v_{ph}(q, w)\Pi^{(0)}(q, w)}{\varepsilon(q, w)} \right]} \quad (44)$$

$$v_q^{(0)} = \frac{4\pi e^2}{q^2} \quad D_q^{(0)} = \frac{4\pi}{q^2} \Rightarrow v_q^{(0)} = e^2 D_q^{(0)} \quad (45)$$

$$v_{ph} = g_q^2 D_q^{(0)} \quad (46)$$

$$\tilde{v}_{ph}(\vec{q}, w) = \frac{g_q^2 D_q^{(0)}(q, w)}{\varepsilon^2 \left[1 - \frac{g_q^2 D_q^{(0)} \Pi^{(0)} \varepsilon}{\varepsilon^2} \right]} \quad (47)$$

\tilde{g}_q , normalize olmuş elektron-fonon etkileşimi ise,

$$\tilde{g}_q = \frac{g_q}{\varepsilon(\vec{q}, w)} \quad (48)$$

Renormalize olmamış fonon potansiyeli;

$$v_{ph} = g_q^2 \frac{2w_q}{w^2 - w_q^2}$$

$q = 0$ 'da akustik fononların enerjileri yoktur. $w < w_{LO}$ için negatif v_{ph} çıkar ($v_{ph} < 0$). $w \ll w_{LO}$ olduğu zaman, toplam potansiyel negatif olabilecektir. $w \ll w_{LO} \ll E_F \Rightarrow w_0$. Fermi yüzeyinin çok ince bir bölgesi negatif potansiyelle katkıda bulunabilir. Bu bölgenin kalınlığı, fonon enerjisi ile bağlantılıdır. Fonon, exchange yüzeye yakın bölgelerde olabildiği gibi yüzeyin tam karşı taraflarında da gerçekleşebilir. Karşı taraftaki elektronlar arası fonon exchange'inde toplam $k = 0$ olur ($-k_F + k_F$).

2.1 RPA de numerik hesaplar:

Cooper çiftleri, enerji korunumunu ne kadar bozuyorlarsa ömurleri o kadar az olur. Cooper çiftlerinin sayısı sabit kalmaz.

$$\begin{aligned} n^2 - \langle n \rangle^2 &\neq 0 \\ \Delta t &\sim \frac{\hbar}{\Delta E} \sim \frac{1}{w_{LO}} = \frac{1}{100meV} \\ \varepsilon(\vec{q}, w) &= \frac{q_{TF}^2}{2q^2} \left[1 + \frac{m^2}{2k_F q^3} [4E_F E_q + (E_q - w)^2] \ln \left| \frac{E_q + qv_F + w}{E_q - qv_F + w} \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{2k_F q^3} [4E_F E_q - (E_q - w)^2] \ln \left| \frac{E_q + qv_F - w}{E_q - qv_F - w} \right| \right] \end{aligned} \quad (49)$$

$w E_F$ ile, $q k_F$ ile ölçeklendirilir.

$$\begin{aligned} w &\approx 0 \\ w &\ll w_{ph} \sim 5eV \\ w &\ll w_{LO} \ll E_p \sim w_p \\ [\varepsilon(\vec{q}, w)]_{w \approx 0} &\approx 1 + \frac{q_{TF}^2}{q^2} \end{aligned}$$

3 Cooper Etkileşmesi (Cooper Pairing) $T = 0$

Küresel Fermi yüzeyinin $2\omega_0$ kalınlıklı çok ince bir kabuğu içinde negatif potansiyelli e-e etkileşiminin varlığı görülmüştü. (Burada ω_0 tipik fonon frekansdır.)

$DM = N$ serbestlik dereceli, her biri farklı frekansa sahip fonon için

$$N = \int_0^{\omega_0} d\omega g(\omega)$$

$$g(\omega) = \int \frac{dq}{(2\pi)^3} \text{Im} D^{(0)}(q, \omega)$$

$$g(\omega) = \int \frac{dq}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \text{Im} D_{\lambda}^{(0)}(q, \omega), \quad \lambda \text{ farklı dalları temsil etmek üzere, örneğin akustik optik dal}$$

Bundan sonra sadece bu kabukla ilgileneceğiz,

$$V_{ee} = \begin{cases} -V_0 & \omega < \omega_0 \text{ ise} \\ 0 & \omega > \omega_0 \text{ ise} \end{cases} \quad (50)$$

Cooper çifti, zıt momentumlu ($k, -k$) ve zıt spinli (\uparrow, \downarrow) iki elektrondan oluşur. Polaritonlarda olduğu gibi Cooper çiftleri içinde bosonik operatörler yazılacak. Aynı şekilde iyi boson davranışı yine seyrellik limitte söz konusu.

(50) potansiyeli ile

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V_{ee}(r) \right) \psi = E\psi \quad (51)$$

denklemini çözülecek. Cooper çiftlerinin kendi aralarındaki etkileşimlerinde hesaba katılması gerektiğinden (51) ye bir V_{eff} potansiyelide eklenmelidir.

Çok parçacıklı sistemde etkileşim Hamiltoniyeni

$$H_{etk} = -V_0 \sum_{k, k', q, \sigma, \sigma'} c_{k+q\sigma}^{\dagger} c_{k'-q\sigma'}^{\dagger} c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} \quad (52)$$

Tüm etkileşim $E_F - \omega_0 < E < E_F + \omega_0$ bölgesinde oluşuyor ve taban durumu (ψ_{td}) bilinmiyor.

$$V_{eff} = \langle \psi_{td} | H_{etk} | \psi_{td} \rangle \quad (53)$$

$V_{eff} \rightarrow \infty$ de sistem faz geçişi gösterir ve taban durumu -standart Fermi sıvısından süperiletken taban durumuna- değişir.

H_{etk} için etkileşim gösteriminde S matrisi

$$S = Texp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{H}_{etk}(t') \right\} \quad (54)$$

(54) açılıp diyagramlar oluşturulacak ve RPA da yapıldığı gibi toplanacak.

$$S = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{H}_{etk}(t') + \dots$$

Taban durumu

$$|\varphi_0\rangle = \prod_k |k \uparrow -k \downarrow\rangle \quad (55)$$

dan oluşturulacak. (54) açılımındaki ilk iki terim alınarak (55) ya uygulanarak taban durumu elde edilir :

$$|\psi_{td}\rangle = S |\varphi_0\rangle \quad (56)$$

$$|\psi_{td}\rangle = \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{H}_{etk}(t') \right] \prod_k |k \uparrow -k \downarrow\rangle$$

(56), (53) de yazılarak

$$V_{eff} = \left\langle \varphi_0 \left| \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{H}_{etk}(t') \right] H_{etk} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \tilde{H}_{etk}(t'') \right] \right| \varphi_0 \right\rangle$$

Son ifadenin açılımında

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k(t) &= e^{i\xi_k t} c_k(0) \\ G_k^{(0)}(t_1 - t_2) &= -i \langle T c_k^\dagger(t_1) c_k(t_2) \rangle \\ &= -i [\theta(t_1 - t_2) \theta(\xi_k) - \theta(t_2 - t_1) \theta(-\xi_k)] \end{aligned}$$

kullanılarak

$$V_{eff} = -V_0 + \frac{i}{\hbar} (-V_0)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{2i\xi_k t'} \sum_q (i)^2 G_{k'-q\uparrow}^{(0)}(t') G_{-k'+q\downarrow}^{(0)}(t') \quad (57)$$

elde edilebilir.

Örneğin, V_{eff} açılımından gelen

$$\left\langle \varphi_0 \left| H_{etk} \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \tilde{H}_{etk}(t'') \right| \varphi_0 \right\rangle$$

terimini hesaplayalım.

$$= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \langle \varphi_0 | H_{etk} \tilde{H}_{etk}(t'') | \varphi_0 \rangle$$

(52) ve (55) dan

$$= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left\langle k' \uparrow -k' \downarrow \left| \sum (-V_0)^2 c_{k_1+q_1\sigma_1}^\dagger c_{k_1'-q_1\sigma_1}^\dagger c_{k_1'\sigma_1} c_{k_1\sigma_1} \tilde{c}_{k_2+q_2\sigma_2}^\dagger(t') \tilde{c}_{k_2'-q_2\sigma_2}^\dagger(t') \tilde{c}_{k_2'\sigma_2}(t') \tilde{c}_{k_2\sigma_2}(t') \right| k \uparrow -k \downarrow \right\rangle$$

Toplam $k_1, k_1', k_2, k_2', q_1, q_2, \sigma_1, \sigma_1', \sigma_2, \sigma_2'$ üzerinden.

$$= \frac{i}{\hbar} (-V_0)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sum e^{i(\xi_{k_2} + \xi_{k_2'})t'} \left\langle k' \uparrow -k' \downarrow \left| c_{k_1+q_1\sigma_1}^\dagger c_{k_1'-q_1\sigma_1}^\dagger c_{k_1'\sigma_1} c_{k_1\sigma_1} \tilde{c}_{k_2+q_2\sigma_2}^\dagger(t') \tilde{c}_{k_2'-q_2\sigma_2}^\dagger(t') c_{k_2'\sigma_2} c_{k_2\sigma_2} \right| k \uparrow -k \downarrow \right\rangle$$

$$c_{k_2'\sigma_2} c_{k_2\sigma_2} |k \uparrow -k \downarrow\rangle = \delta_{\sigma_2'\uparrow} \delta_{\sigma_2\downarrow} \delta_{k_2',k} \delta_{k_2,-k}$$

$$c_{k_1+q_1\sigma_1}^\dagger c_{k_1'-q_1\sigma_1}^\dagger |k' \uparrow -k' \downarrow\rangle = \delta_{\sigma_1'\downarrow} \delta_{\sigma_1\uparrow} \delta_{k_1'-q_1,-k'} \delta_{k_1+q_1,k'}$$

kullanılarak

$$= \frac{i}{\hbar} (-V_0)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sum e^{i(\xi_{-k} + \xi_k)t'} \left\langle c_{q_1-k'\downarrow} c_{-q_1+k'\uparrow} \tilde{c}_{-k+q_2\downarrow}^\dagger(t') \tilde{c}_{k-q_2\uparrow}^\dagger(t') \right\rangle$$

elde edilir. Buradaki toplam q_1, q_2 üzerinden. Bu son ifade $\xi_{-k} = \xi_k$ olduğu hatırlanarak ve GF tanımı kullanılarak, V_{eff} in açılımındaki bu terim için GF cinsinden bir ifade elde edilecektir.

Sonlu sıcaklıkta $\theta(-\xi_k) = n_F(\xi_k)$ ve $\theta(\xi_k) = 1 - n_F(\xi_k)$ olduğu göz önüne alınırsa (57)

$$V_{eff} = -V_0 \left[1 + V_0 \sum_q \frac{\frac{1}{2} - n_F(\xi_{k'-q})}{(\xi_k - \xi_{k'-q})} \right] \quad (58)$$

haline gelecektir.

(58) daki toplam integrale çevrilirse,

$$V_{eff} = -V_0 \left[1 + V_0 \int \frac{dq}{(2\pi)^3} \frac{\frac{1}{2} - n_F(\xi_{k'-q})}{(\xi_k - \xi_{k'-q})} \right] \quad (59)$$

(59), efektif potansiyelde S matrisinin 2. derece açılımı ile elde edilen ifadesi idi. Hesaplanabilen diğer terimlerde hesaba katılırsa,

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

$$V_{eff} = \frac{-V_0}{1 + V_0 \int \frac{dq}{(2\pi)^3} \frac{\frac{1}{2} - n_F(\xi_{k'-q})}{(\xi_k - \xi_{k'-q})}} \quad (60)$$

V_{eff} , (60) ifadesinin paydası 0 olduğunda sonsuza gider (faz geçişi).

$$1 + V_0 \int \frac{dq}{(2\pi)^3} \frac{\frac{1}{2} - n_F(\xi_{k'-q})}{(\xi_k - \xi_{k'-q})} = 0$$

İntegrali

$$\int \frac{dq}{(2\pi)^3} = \int_{\mu-\omega_D}^{\mu+\omega_D} g(E) dE$$

ile enerji integraline çevirelim. Burada $g(E)$ durum yoğunluğudur.

$$1 + V_0 \int_{\mu-\omega_D}^{\mu+\omega_D} dE g(E) \frac{1/2 - n_F(E_{k'-q} - \mu)}{(E_k - \mu) - (E_{k'-q} - \mu)} = 0$$

Paydadaki E_k terimi dışarıdan belirleniyor (sabit)

$$\Rightarrow 1 + V_0 \int_{\mu-\omega_D}^{\mu+\omega_D} dE g(E) \frac{1/2 - n_F(E - \mu)}{(E' - \mu) - (E - \mu)} = 0 \quad (61)$$

$\mu \gg \omega_D$ ve integral E_F civarında alındığından elektron durum yoğunluğu $g(E)$, E_F civarında seriye açılarak ilk terimlerle yetinilebilir.

$$g(E) = g(E_F) + \left. \frac{\partial g}{\partial E} \right|_{E=E_F} (E - E_F) + \dots$$

Açılımdaki ilk terim süperiletkenlikte çok yüksek olduğundan sadece bu terim alınarak hesaba devam edilebilir. $\xi = E - \mu$ olduğunu hatırlayarak

$$\Rightarrow 1 + g(E_F) V_0 \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{1/2 - n_F(\xi)}{\xi' - \xi} = 0 \quad (62)$$

$$T = 0 \Rightarrow n_F(\xi) = \theta(-\xi) = \begin{cases} 1 & \xi < 0 \text{ ise} \\ 0 & \xi > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Dolayısıyla (62)

$$1 + g(E_F) V_0 \int_{-\omega_D}^0 d\xi \frac{1}{\xi' - \xi} = 0$$

olarak yazılabilir.

$$\Rightarrow -\frac{1}{g(E_F)V_0} = \int_{-\omega_D}^0 d\xi \frac{1}{\xi' - \xi} = \ln \left(\frac{\xi'}{\xi' + \omega_D} \right)$$

$\Delta \ll \omega_D$ olmak üzere (bu durum zayıf etkileşimde geçerli, weak coupling) $\xi' = \Delta$ olsun,

$$-\frac{1}{g(E_F)V_0} = \ln \left(\frac{\Delta}{\omega_D} \right) \quad (63)$$

olarak yazılabilir.

$$\Delta = \omega_D \exp \left\{ -\frac{1}{g_F V_0} \right\} \quad (64)$$

(64) Cooper aralığının (Cooper gap, Δ) ifadesidir.

Şimdi $\Delta = 0$ veren sıcaklığı yani kritik sıcaklığı (T_c) arıyoruz. Bunun için

$$n_F(\xi) = \frac{1}{e^{\beta\xi} - 1}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

kullanarak (62) de $\Delta = (\xi') = 0$ yazalım,

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + g(E_F)V_0 &= \ln \left(\frac{T_c}{\omega_D} \right) \\ T_c &= \omega_D e^{-1/(g_F V_0)} \end{aligned} \quad (65)$$

Burada $g_F = g(E_F)$ dir. (65) Cooper'ın elde ettiği sonuçtur ve BCS teorisinin sonucu olan

$$T_c = 1.14 e^{-1/(g_F V_0)}$$

a çok yakındır.

$$\frac{2\Delta}{T_c} \quad (66)$$

olarak tanımlanan BCS oranı için, BCS teorisinin verdiği değer 3.57 iken Cooper'ın verdiği değer 2 dir. bu sonuçlar zayıf süperiletkenlik (küçük V_0) için malzemenin bağımsızdır.

4 Süperiletkenlerin Bazı Özellikleri

- Mükemmel Diyamanyetizma :** Dışarıdan uygulanan manyetik alana uygulanan alanla aynı şiddette cevap. Sistemin manyetik alana verdiği cevap sıcaklığa bağlıdır. Kritik sıcaklığın altında (sistem süperiletken fazda iken) mükemmel bir diyamanyetizma (Meissner etkisi) görülürken kritik sıcaklığın üstünde (normal fazda) normal bir sistemin verdiği cevap görülür.

Mükemmel diyamanyetizmada, sistem uygulanan dış alana cevap olarak, uygulanan alana eşit büyüklükte ve zıt yönlü bir alan yaratacak şekilde kendi içinde bir akım oluşturuyor. Bu akım sistem süperiletken fazda oldukça sönümlenmiyor.

Şekil 1 de, soldaki şekilde $T < T_c$, $H < H_c$ bölgesindeki süperiletken malzemenin yakınındaki manyetik alanın davranışı görülmektedir. Bu Meissner etkisidir. Sağdaki şekil ise $T > T_c$ içindir, malzeme bu bölgede normal (süperiletken olmayan) fazdadır.

- İletkenliğin sıcaklıkla değişimi :**

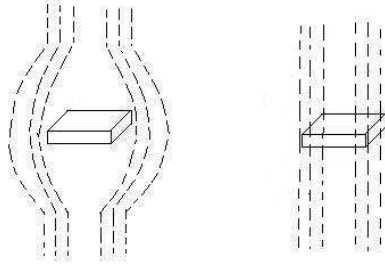
Süperiletken malzemenin direncinin sıcaklığa göre değişimi 1911'de Kamerlung Onnes tarafından verilmiş ve bu davranışın açıklanması ancak 1957 de BCS teorisi ile gerçekleşmiştir.

- Kritik sıcaklığın malzemenin nükleer izotopik kütleleriyle ilgili oluşu :**

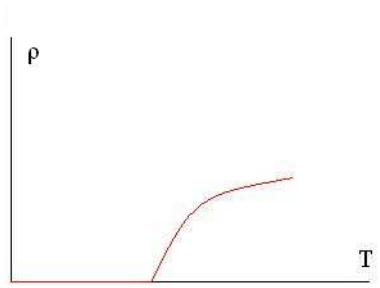
$$T_c \propto (m)^\alpha, \quad \alpha \simeq 1/2$$

Süperiletkenlik olayının elektronlarla ilgili görünmesine karşın T_c çekirdekdeki nötron sayısıyla değişiyor.

1954'de Frochlich süperiletkenliğin elektron - fonon etkileşimi ile ilgili olduğunu göstererek bunu açıklıyor.



Şekil 1: Manyetik alanın süperiletken ve normal fazdaki malzeme civarındaki davranışı



Şekil 2: Süperiletken malzemenin direncinin sıcaklığa göre değişimi

5 Süperiletkenliğin Fenomenolojik Teorileri

İlk zamanlar, direncin nasıl süperiletken fazda sıfır olduğunu açıklamaya çalışılan ama çok başarılı olmayan bazı fenomenolojik teoriler geliştiriliyor. F. London'unki bunlardan biri.

London, süperiletken akım (\vec{J}) için, \vec{A} uygulanan dış manyetik alanın vektör potansiyeli olmak üzere

$$\vec{J} = \alpha \vec{A}$$

bağıntısını öngörüyor. Burada α bir sabittir. Maxwell denklemlerinden biri olan

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

ve manyetik alanın vektör potansiyel cinsinden tanımı

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

ile

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} - \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

vektör özdeşliği ve London ayarı (London Gauge)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

kullanılarak şu denklem elde edilir,

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{4\pi}{c} \alpha \vec{A} = 0 \quad (67)$$

(67)

$$A(r) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{ikr} A_k$$

Fourier dönüşümü kullanılarak

$$A_k \left(-k^2 - \frac{4\pi}{c} \alpha \right) = 0$$

denkleme dönüştürülebilir. Buradan çözülen A_k nın ters Fourier dönüşümü alınarak (67) çözülmüş olacaktır.

(67) Fourier dönüşümü kullanmadan da çözülebilir,

$$\frac{d^2}{dx^2} A - \frac{4\pi}{c} \alpha A = 0$$

çözüm olarak $e^{\pm x/\lambda}$ önerirsek

$$\lambda = \sqrt{\frac{c}{4\pi\alpha}}$$

elde ederiz, böylece (67) diferansiyel denklemi

$$J = \alpha A = \frac{4\pi}{c} \lambda^2 A \quad (68)$$

cebirsel denkleme indirgenmiş olur. (68) London denklemi olarak bilinir. London denklemi yerel bir denklemdir.

Fakat bu ve bunun gibi fenomenolojik teorilerle direncin sıfır olması anlaşılamiyor. Bunun anlaşılması 1950'lerde BCS teorisi ile oluyor.

6 BCS Teorisi

(50) ile verilen elektron - elektron etkileşmesi ve elektron - fonon etkileşmesine dayanır. BCS Hamiltoniyeni,

$$H = \sum_{k,\sigma} \xi_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} c_{k+q\sigma}^\dagger c_{k'-q\sigma'}^\dagger c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} \quad (69)$$

elektron - elektron etkileşiminden, normal Green fonksiyonu (GF)

$$G_k(\tau) = - \left\langle T c_{k\sigma}(\tau) c_{k\sigma}^\dagger(0) \right\rangle \quad (70)$$

ve anormal Green fonksiyonu

$$F_k(\tau) = \langle T c_{-k\sigma}(\tau) c_{k\sigma'}(0) \rangle \quad (71)$$

olarak isimlendirilebilecek iki korelasyon ortaya çıkar. (σ, σ' birbirine zıt spin durumlarıdır)

(70) de spin, momentum ve parçacık sayısı korunurken, (71) de sadece momentum korunur.

$$\psi_k = \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (72)$$

ve

$$G = \left\langle T \psi_k(\tau) \psi_k^\dagger(0) \right\rangle \quad (73)$$

tanımıyla

$$G = \begin{pmatrix} \left\langle c_{k\uparrow}(\tau) c_{k\uparrow}^\dagger(0) \right\rangle & \left\langle c_{k\uparrow}(\tau) c_{-k\downarrow}(0) \right\rangle \\ \left\langle c_{-k\downarrow}^\dagger(\tau) c_{k\uparrow}^\dagger(0) \right\rangle & \left\langle c_{-k\downarrow}^\dagger(\tau) c_{-k\downarrow}(0) \right\rangle \end{pmatrix} \quad (74)$$

elde edilir. (72), Nambu spinör olarak bilinir. (74) in köşegen elemanlarının (70) ile tanımlanan normal GF, köşegen olmayan elemanlarının da (71) ile tanımlanan anormal GF yi verdiği görülebilir.

(69) Hamiltoniyenin ikinci terimi için ortalama alan yaklaşımı kullanılarak dört operatörün çarpımının beklenen değeri, iki operatör çarpımlarının beklenen değerleri cinsinden yazılacak.

Ortalama alan yaklaşımı, A ve B iki operatör olmak üzere

$$AB = \langle A \rangle B + \langle B \rangle A - \langle AB \rangle \quad (75)$$

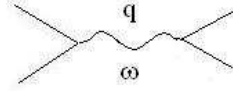
ile verilir.

(75), (69) nin ikinci terimi için uygulanırsa,

$$c_{k+q\sigma}^\dagger c_{k'-q\sigma'}^\dagger c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} = \langle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{k'-q\sigma'}^\dagger \rangle c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} + \langle c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} \rangle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{k'-q\sigma'}^\dagger - \langle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{k'-q\sigma'}^\dagger \rangle \langle c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} \rangle$$

$$c_{k+q\sigma}^\dagger c_{k'-q\sigma'}^\dagger c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} = \delta_{k,-k'} \delta_{\sigma,\bar{\sigma}'} \left\{ \langle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{-k-q\bar{\sigma}}^\dagger \rangle c_{-k\bar{\sigma}} c_{k\sigma} + \langle c_{-k\bar{\sigma}} c_{k\sigma} \rangle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{-k-q\bar{\sigma}}^\dagger - \langle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{-k-q\bar{\sigma}}^\dagger \rangle \langle c_{-k\bar{\sigma}} c_{k\sigma} \rangle \right\}$$

(50) e göre elektron - elektron etkileşiminin enerjisi (değişim enerjisi) $\omega < \omega_D$ olduğunda, etkileşim



Şekil 3: elektron - elektron etkileşimi

potansiyeli $-V_0$ oluyordu, böylece (69) nin ikinci terimi (H_{etk}), son yazılan ifade (69) nin ikinci teriminde yazılıp toplamda δ lar kullanılarak

$$H_{etk} = \frac{1}{2V} \sum_{k,q,\sigma} (-V_0) \left\{ \langle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{-k-q\bar{\sigma}}^\dagger \rangle c_{-k\bar{\sigma}} c_{k\sigma} + \langle c_{-k\bar{\sigma}} c_{k\sigma} \rangle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{-k-q\bar{\sigma}}^\dagger - \langle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{-k-q\bar{\sigma}}^\dagger \rangle \langle c_{-k\bar{\sigma}} c_{k\sigma} \rangle \right\}$$

(76)

haline gelir. Bu indirgenmiş Hamiltoniyendir.

$$\Delta_k = \frac{1}{V} \sum_q (-V_0) \langle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{-k-q\bar{\sigma}}^\dagger \rangle$$

(77)

tanımlanmasıyla (V hacim olmak üzere) (76)

$$H_{etk} = \sum_{k,\sigma} \left\{ \Delta_k c_{-k\bar{\sigma}} c_{k\sigma} + \Delta_k^* c_{k\sigma}^\dagger c_{-k\bar{\sigma}}^\dagger + \frac{1}{V_0} (\Delta_k)^2 \right\}$$

(78)

haline gelir. Böylece (69)

$$H = \sum_{k,\sigma} \left\{ \xi_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \frac{\Delta_k}{2} c_{-k\bar{\sigma}} c_{k\sigma} + \frac{\Delta_k^*}{2} c_{k\sigma}^\dagger c_{-k\bar{\sigma}}^\dagger \right\} + sbt$$

(79)

olarak yazılacaktır.

(79) çözmek istediğimiz BCS Hamiltoniyendir, bu Hamiltoniyenin matris temsilini yazıp köşegen hale getireceğiz. Hamiltoniyedeki sbt terimi sabitlerden oluşur ve bu terimin matris temsili zaten köşegendir. Hamiltoniyedeki toplam içindeki terimler tek momentumlu olduğundan

$$H^{k,\sigma} = \frac{1}{2} \left\{ \xi_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \xi_{-k} c_{-k\sigma}^\dagger c_{-k\sigma} + \Delta_k c_{-k\bar{\sigma}} c_{k\sigma} + \Delta_k^* c_{k\sigma}^\dagger c_{-k\bar{\sigma}}^\dagger \right\} + sbt$$

(80)

olmak üzere

$$H = \sum_{k,\sigma} H^{k,\sigma}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla sadece (80) i çözmek (79) u çözmek için yeterlidir.

(80) in matris temsilini yazmak için baz olarak (72) seçelim.

$$H^{k,\sigma} = \begin{pmatrix} c_{k\sigma}^\dagger & c_{-k\bar{\sigma}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k & \Delta_k^* \\ \Delta_k & -\xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k\sigma} \\ c_{-k\bar{\sigma}}^\dagger \end{pmatrix}$$

olacağı görülebilir. Yani (80) in Nambu spinör bazındaki matris temsili

$$\overline{\overline{H}}^{k,\sigma} = \begin{pmatrix} \xi_k & \Delta_k^* \\ \Delta_k & -\xi_k \end{pmatrix}$$

(81)

dır, ve bu matris köşegen hale getirilebilir, yani BCS Hamiltoniyeni tam olarak çözülebilir. (81) nin özdeğerleri taban durumunun enerjisini özvektörleri ise quasiparticle taban durumunu verecektir.

(81) nin özdeğer problemini çözelim.

$$\det(\overline{H}^{k,\sigma} - \lambda I) = 0$$

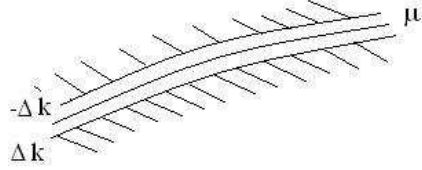
$$\begin{vmatrix} \xi_k - \lambda & \Delta_k^* \\ \Delta_k & -\xi_k - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \xi_k^2 - |\Delta_k|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_k^{(1,2)} = \pm \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2} \quad (82)$$

Fermi seviyesinde

$$k = k_F \Rightarrow \xi_{k_F} = 0 \Rightarrow \lambda_k = \pm |\Delta_{k_F}|$$

quasiparticle ın enerji aralığı $[-\Delta_k, \Delta_k]$ dir (Şekil 6).



Şekil 4: elektron - elektron etkileşimi

(77) de $q \rightarrow q - k$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Delta_0 = -\frac{1}{V} \sum_q V_0 \langle c_{q\sigma}^\dagger c_{-q\bar{\sigma}}^\dagger \rangle$$

yani $\Delta_k = \Delta_0 = \Delta$ sabittir. Öte yandan

$$\langle c_{q\sigma}^\dagger c_{-q\bar{\sigma}}^\dagger \rangle = \langle \psi_{BCS}^{(0)} | c_{q\sigma}^\dagger c_{-q\bar{\sigma}}^\dagger | \psi_{BCS}^{(0)} \rangle$$

dır ama ψ_{BCS}^0 taban durumu şimdilik bilinmediğinden bu hesaplanamaz. Bu korelasyon kompleks olabilir ama $\Delta_k = \Delta_0 = \Delta$ koşulundan dolayı bu kompleks sayının mutlak değeri ve açısı k dan bağımsız olmalı. Taban durumunu bulmak için (81) nin özvektörleri hesaplanmalı.

$$\Delta_0 = -\frac{1}{V} \sum_q V_0 \langle c_{q\sigma}^\dagger c_{-q\bar{\sigma}}^\dagger \rangle e^{-i\theta_0}$$

olsun.

$$c_{q\sigma}^\dagger \rightarrow e^{-i\theta_0/2} c_{q\sigma}^\dagger$$

dönüşümü ile (fermionik dalga fonksiyonunun fazını değiştirdik sadece)

$$\Delta_0 = -\frac{1}{V} \sum_q V_0 \langle c_{q\sigma}^\dagger c_{-q\bar{\sigma}}^\dagger \rangle \quad (83)$$

elde edilir. Δ_0 s dalgası süperiletken aralığıdır (s wave superconducting gap). s dalgası denmesinin sebebi Δ_0 ın açısız bağımlılığı olmamasıdır (küresel simetrik).

(81) nin özvektörlerini hesaplayalım.

$$\begin{pmatrix} \xi_k - \lambda_k^{(1)} & \Delta_0 \\ \Delta_0 & -\xi_k - \lambda_k^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = 0$$

$$C_{k\sigma} = \alpha_k c_{k\sigma} + \beta_k c_{-k\bar{\sigma}}^\dagger \quad (84)$$

(81) yi köşegen yapan dönüşüm ($c \rightarrow C$ dönüşümü) uniterdir dolayısıyla c lerin sağladığı anti komütasyon bağıntısını C lerde sağlamalıdır. Bu koşul α ve β lar üzerine bir sınırlama getirir.

$$\{C_{k,\sigma}, C_{k',\sigma'}^\dagger\} = \delta_{k,k'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (85)$$

(84), (85) da yazılıp anti komütasyon açılırsa

$$|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 = 1 \quad (86)$$

Özvektör denklemi $\lambda_k^{(1)} = -\sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$ için açılırsa,

$$\left[\xi_k + \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_0|^2} \right] \alpha_k + \Delta_0 \beta_k = 0 \quad (87)$$

(86), (87) ortak çözümünden,

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k^{(1)}} \right), \quad \beta_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k^{(1)}} \right) \quad (88)$$

elde edilir. Burada,

$$E_k^{(1)} = -\sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2} \quad (89)$$

dir.

$\Delta \rightarrow 0$ limitinde (89), (88) ve (84) den $C_{k,\sigma} \rightarrow c_{-k,\bar{\sigma}}$ olacağı görülebilir. Bu limit süperiletkenliğin olmadığı limittir, yani süperiletkenlik yoksa quasiparticle operatörleri elektron yaratma operatörlerine dönüşür.

Aynı yolla, ikinci özdeğer ($\lambda_k^{(2)}$) için özvektör bulunursa, $\Delta \rightarrow 0$ limitinde $C_{k,\sigma} \rightarrow c_{k,\sigma}$ olacaktır.

Tüm bu işlemlerden sonra (80) Hamiltoniyeni köşegen olmayan kısmı köşegen hale gelmiş olur.

$$H^{k,\sigma} = E_k^{(1)} C_{k\sigma}^\dagger C_{k\sigma} + E_k^{(2)} C_{k\sigma} C_{k\sigma}^\dagger \quad (90)$$

Yani (79)

$$H = \sum_{k,\sigma;k < k_f} E_k^{(1)} C_{k\sigma}^\dagger C_{k\sigma} + \sum_{k,\sigma;k > k_f} E_k^{(2)} C_{k\sigma} C_{k\sigma}^\dagger \quad (91)$$

şekline gelmiş olur.

Eğer,

$$k > k_F \Rightarrow \langle C_{k\sigma} C_{k\sigma}^\dagger \rangle = 0$$

olduğunu kabul edersek taban durumu enerjisi

$$E_{td} = \langle \psi_{BCS}^{(0)} | F | \psi_{BCS}^{(0)} \rangle = \sum_{k,\sigma;k < k_f} E_k^{(1)} \langle C_{k\sigma}^\dagger C_{k\sigma} \rangle_{BCS}$$

olacaktır.

$$\langle C_{k\sigma}^\dagger C_{k\sigma} \rangle_{BCS} = \frac{1}{e^{\beta E_k^{(1)}} + 1}$$

$T = 0$ da basamak fonksiyonuna (θ) dönüşür. Dolayısıyla BCS taban durumu için

$$|\psi_{BCS}^{(0)}\rangle = \prod_{k < k_F} \left(\beta_k + \alpha_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle \quad (92)$$

elde edilir. Burada $|0\rangle$ boşluk durumudur.

6.1 BCS Teorisi - Gorkov Stili

Bölüm 4 de yapıłana alternatif olarak süperiletkenlik hareket denklemleri çözümlerek de aynı sonuca ulaşılabilir. Gorkov bunu yaparak 2. tip süperiletkenler için Ginzburg - Landau teorisi ile BCS teorisinin birbirine eşdeğer olduğunu gösteriyor.

Hareket noktası BCS Hamiltoniyeni ((69) ile elektron - elektron etkileşimi (50))

$$H = \sum_{k,\sigma} \xi_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} v(q) c_{k+q\sigma}^\dagger c_{k'-q\sigma'}^\dagger c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} \quad (93)$$

$$V(q) = \begin{cases} -V_0 & |\xi| < \omega_0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (94)$$

Gorkov GF (70), (71) ile tanımlanmıştı. Hareket denklemleri $\frac{dG_k}{d\tau}$ ve $\frac{dF_k}{d\tau}$ yı elde edelim.

$$\begin{aligned} \frac{dF_k}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} (\theta(\tau) \langle c_{-k\downarrow}(\tau) c_{k\uparrow}(0) \rangle + \theta(-\tau) \langle c_{k\uparrow}(0) c_{-k\downarrow}(\tau) \rangle) \\ \frac{dG_k}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \left(-\theta(\tau) \langle c_{k\sigma}(\tau) c_{k\sigma}^\dagger(0) \rangle + \theta(-\tau) \langle c_{k\sigma}^\dagger(0) c_{k\sigma}(\tau) \rangle \right), \quad \sigma = \uparrow, \downarrow \\ \frac{dc_{k,\sigma}(\tau)}{d\tau} &= [H, c_{k,\sigma}(\tau)], \quad \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau) \end{aligned}$$

bağntılarını kullanarak,

$$\left(-\xi_k + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) F_k(\tau) = \delta(\tau) + \frac{1}{V} \sum_{s,q,\lambda} v(q) \langle c_{k+q\uparrow}^\dagger(\tau) c_{s\lambda}^\dagger(\tau) c_{s+q\lambda}(\tau) c_{-k\downarrow}^\dagger(0) \rangle \quad (95)$$

$$\left(-\xi_k + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) G_k(\tau) = -\delta(\tau) \frac{1}{V} \sum_{s,q,\lambda} v(q) \langle c_{s+q\lambda}^\dagger(\tau) c_{s\lambda}(\tau) c_{k+q\lambda}(\tau) c_{k\lambda}^\dagger(0) \rangle \quad (96)$$

elde edilir.

(95) ve (96) te Fourier dönüşümü yapılarak diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir

:

$$\begin{pmatrix} -\xi_k + iP_n & -\Delta_k \\ -\Delta_k^* & \xi_k + iP_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_k(iP_n) \\ F_k(iP_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (97)$$

(97) in iki tarafı denklem sisteminin katsayılar matrisinin tersi ile çarpılırsa sonuç bulunmuş olur :

$$G_k(iP_n) = -\frac{iP_n + \xi_k}{(E_k + iP_n)(E_k - iP_n)} \quad (98)$$

$$F_k(iP_n) = \frac{-\Delta_k}{(E_k + iP_n)(E_k - iP_n)} \quad (99)$$

E_k ve Δ_k şu bağntılarla tanımlıdır :

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}, \quad \Delta_k = -\frac{1}{V} \sum_q v(q) F_{k+q}(\tau=0) \quad (100)$$

(99) ile verilen anormal GF sıfır ise süperiletkenlik yoktur.

$$F_k(iP_n) = 0 \Rightarrow \Delta_k = 0$$

6.2 Beklenen Değerlerin Hesaplanması

$\psi_{BCS}^{(0)}$ BCS taban durumu olmak üzere $\langle \psi_{BCS}^{(0)} | f(C^\dagger, C) | \psi_{BCS}^{(0)} \rangle$ gibi beklenen değerler nasıl hesaplanacak?

(84) ve (88) dan

$$c_{k\uparrow} = -\frac{E_k}{\xi_k} \left(\alpha_k C_{k\uparrow} - \beta_k C_{-k\downarrow}^\dagger \right) \quad (101)$$

$$c_{k\uparrow}^\dagger = -\frac{E_k}{\xi_k} \left(\alpha_k C_{k\uparrow}^\dagger - \beta_k C_{-k\downarrow} \right) \quad (102)$$

olduğu görülebilir. Beklenen değeri hesaplanmak istenen $f(C^\dagger, C)$, (101) yardımıyla c fermiyon operatörleri cinsinden yazılır ve bilinen BCS taban durumu ile $\langle \psi_{BCS}^{(0)} | f(C^\dagger, C) | \psi_{BCS}^{(0)} \rangle = \langle \psi_{BCS}^{(0)} | g(c^\dagger, c) | \psi_{BCS}^{(0)} \rangle$ hesaplanır.

Örnek olarak, $c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow}$ nın beklenen değerini hesaplayalım.

$$\langle \psi_{BCS}^{(0)} | c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} | \psi_{BCS}^{(0)} \rangle$$

(92) den

$$\begin{aligned} \langle \psi_{BCS}^{(0)} | c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} | \psi_{BCS}^{(0)} \rangle &= \prod_{q, q'} \langle 0 | (u_q + v_q c_{-q\downarrow} c_{q\uparrow}) c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} (u_{q'} + v_{q'} c_{q'\uparrow}^\dagger c_{-q'\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \left\langle 0 \left| \left[\prod_{q \neq k} (u_q + v_q c_{-q\downarrow} c_{q\uparrow}) \right] (u_k + v_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}) c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} (u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger) \left[\prod_{q' \neq k} (u_{q'} + v_{q'} c_{q'\uparrow}^\dagger c_{-q'\downarrow}^\dagger) \right] \right| 0 \right\rangle \\ &= \left\langle 0 \left| \left[\prod_{q \neq k} (u_q + v_q c_{-q\downarrow} c_{q\uparrow}) \right] \left[\prod_{q' \neq k} (u_{q'} + v_{q'} c_{q'\uparrow}^\dagger c_{-q'\downarrow}^\dagger) \right] (u_k + v_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}) c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} (u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger) \right| 0 \right\rangle \end{aligned}$$

Sağdaki çarpım içindeki terimler kesinlikle $q' \neq k$ olduğundan bu şekilde yer değiştirebilir.

$$= \left[\prod_{q, q' \neq k} \langle 0 | (u_q + v_q c_{-q\downarrow} c_{q\uparrow}) (u_{q'} + v_{q'} c_{q'\uparrow}^\dagger c_{-q'\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle \right] \langle 0 | (u_k + v_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}) c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} (u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle$$

Köşeli parantez içindeki çarpımı ve köşeli parantez dışındaki terimi ayrı ayrı inceleyelim.

Köşeli parantez içindeki terim,

$$\prod_{q, q' \neq k} \langle 0 | u_q u_{q'} + u_q v_{q'} c_{q'\uparrow}^\dagger c_{-q'\downarrow}^\dagger + v_q u_{q'} c_{-q\downarrow} c_{q\uparrow} + v_q v_{q'} c_{-q\downarrow} c_{q\uparrow} c_{q'\uparrow}^\dagger c_{-q'\downarrow}^\dagger | 0 \rangle$$

Bu terimin sadece $q = q'$ için sıfırdan farklı bir terim vereceği görülebilir. $q = q'$ terimi ise $u_q^2 + v_q^2$ dir ve bu da ((86) den) 1 e eşittir.

Köşeli parantez dışındaki terim,

$$\begin{aligned} &= \langle 0 | (u_k + v_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}) (u_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | u_k u_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + u_k v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger + u_k v_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + v_k v_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger | 0 \rangle \\ &= u_k^2 \langle 0 | c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} | 0 \rangle + u_k v_k \langle 0 | c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger | 0 \rangle + u_k v_k \langle 0 | c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} | 0 \rangle + v_k^2 \langle 0 | c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

$|0\rangle$ nın boşluk durumu olduğu hatırlanırsa toplamdaki ilk terimin boşlukta parçacık yok edilemeyeceği için sıfır olduğu görülebilir. İki ve üçüncü terimde ise yaratma operatörleri ile yok etme operatörlerinin sayısı eşit olmadığından, bu terimlerde sıfırdır. Toplamdaki tek sıfırdan farklı terim dördüncü terimdir. Bu terimde yaratma operatörleri ile yok etme operatörlerinin sayısı eşittir ve yaratılan tüm parçacıklar yok edilmektedir.

Sonuç olarak

$$\langle c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} \rangle = v_k^2$$

dir.

Süperiletken aralığı denklemini elde etmek için (77) deki beklenen değeri yukarıdaki gibi bulalım. (77) ile tanımlanan Δ_k nın reel olduğu hatırlanıp, (77) de $q \rightarrow q - k$ dönüşümü yapılırsa bağıntı şu hale gelir :

$$\Delta_k = \frac{1}{V} \sum_q (-V_0) \langle c_{q\uparrow}^\dagger c_{-q\downarrow}^\dagger \rangle$$

toplamdaki beklenen değer yukarıda anlatılan yöntemle bulunursa

$$\Delta_k = \frac{1}{V} \sum_q (-V_0) u_q v_q = \Delta_0$$

sabit değeri elde edilir. Toplam integrale dönüştürülüp u_q, v_q için (88) da elde edilen değerler kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= -\frac{V_0}{V} \frac{V}{(2\pi)^3} \int dq u_q v_q \\ &= -\frac{V_0}{V} \frac{V}{(2\pi)^3} \int dq \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{\xi_q}{E_q}\right) \left(1 + \frac{\xi_q}{E_q}\right)} \end{aligned}$$

E_q için (89) daki değeri kullanılırsa, (???????????? - işaret sorunu ??????????)

$$\Delta_0 = V_0 \int \frac{dq}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \frac{\Delta_0}{E_q} \quad (103)$$

(103) ün doğal çözümü $T > T_c$ de geçerli olan $\Delta_0 = 0$ dir. Diğer çözüm için (103) deki integrali enerji integraline çevirelim.

$$\int \frac{dq}{(2\pi)^3} = \int g(\xi) d\xi$$

$$1 = V_0 \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi g(\xi) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}$$

$g(\xi) \simeq g(0) = g_F$ kabul edip $\xi = \Delta \sinh \alpha$ ($\Rightarrow d\xi = \Delta \cosh \alpha d\alpha$) dönüşümünü kullanırsak

$$\begin{aligned} 1 &= V_0 g_F \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\alpha \frac{\Delta \cosh \alpha}{2\Delta \sqrt{\sinh^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{2} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\alpha \\ \Rightarrow 1 &= V_0 g_F \frac{1}{2} \sinh^{-1} \frac{\xi}{\Delta} \Big|_{-\omega_D}^{\omega_D} = V_0 g_F \sinh^{-1} \frac{\omega_D}{\Delta} \\ \frac{\omega_D}{\Delta} &= \sinh \left(\frac{1}{g_F V_0} \right) \end{aligned} \quad (104)$$

Zayıf etkileşimde (weak coupling) $\Delta \ll \omega_D \sinh$ argümanı da 1 den çok büyüktür. Bu durumda (104)

$$\begin{aligned} \frac{\omega_D}{\Delta} &= \frac{1}{2} \exp \left(\frac{1}{g_F V_0} \right) \\ \Delta &= 2\omega_D \exp \left(-\frac{1}{g_F V_0} \right) \end{aligned} \quad (105)$$

Cooper'ın bulduğu sonuçta (64), (105) daki 2 katsayısı yoktu.

(105) da görünen iki limit durumu :

- g_F çok büyük ve $V_0 < 0$ durumunda $\Delta = \Delta_{max} = 2\omega_D$
- g_F çok küçük ve $V_0 > 0$ durumunda $\Delta = 0$

Şimdi bu formülasyon dahilinde T_c hesaplayalım. Bunun için Δ_k ifadesini, Δ nın sıfıra çok yakın olduğu yerde ele alacağız. (T_c ye alttan yaklaşıyoruz)

$$\Delta_k = -\frac{1}{V} \sum_q v(q) F_q(0^+)$$

¹ $F_q(iP_n)$ (99) ile veriliyordu. Bu bağıntı kullanılarak

$$F_q(\tau = 0^+) = \frac{1}{\beta} \sum_{P_k} \frac{-\Delta_0}{\xi_q^2 + \Delta_0^2 + P_k^2}$$

buradaki frekans toplamının bulunmasıyla

$$F_q(\tau = 0^+) = \frac{\Delta_0}{2\sqrt{\xi_q^2 + \Delta_0^2}} \tanh \frac{\beta\sqrt{\xi_q^2 + \Delta_0^2}}{2} \quad (106)$$

elde edilecektir. Bunu Δ_k ifadesinde yerine yazalım,

$$\Delta_0 = -\frac{1}{V} \sum_q v(q) \frac{\Delta_0}{2\sqrt{\xi_q^2 + \Delta_0^2}} \tanh \frac{\beta\sqrt{\xi_q^2 + \Delta_0^2}}{2} \quad (107)$$

(107) in $T < T_c$ için çözümü $\Delta_0 = 0$ dir.
 $T \rightarrow T_c^-$ için (107)

$$1 = -\frac{1}{V} \sum_q v(q) \frac{1}{2\sqrt{\xi_q^2 + \Delta_0^2}} \tanh \frac{\beta\sqrt{\xi_q^2 + \Delta_0^2}}{2} \quad (108)$$

ve $T = T_c^-$ de

$$1 = -\frac{1}{V} \sum_q v(q) \frac{1}{2\xi_q} \tanh \frac{\beta_c \xi_q}{2}$$

haline gelir. Buradan $\beta_c = 1/kT_c$ bulunacak. $v(q) = -V_0$ yazıp toplamı enerji integraline dönüştürelim.

$$1 = V_0 g_F \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{1}{2\xi} \tanh \frac{\beta_c \xi}{2}$$

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{x} \tanh x = \ln \left(\frac{4\gamma}{\pi} \alpha \right), \quad \gamma = 1.79... (\text{Euler sabiti})$$

integral formülünden yararlanılarak

$$\frac{1}{V_0 g_F} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2\gamma}{\pi} \omega_D \beta_c \right)$$

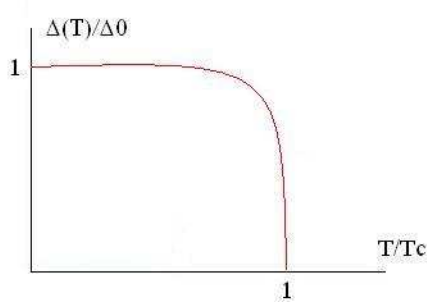
$$T_c = 1.14 \omega_D \exp \left(-\frac{1}{V_0 g_F} \right) \quad (109)$$

elde edilir. T_c sistemin faz geçişi gösterdiği (süperiletken) kritik sıcaklıktır.

(108), $TT < T_c$ için geçerli olan bir denklemdir, dolayısıyla sistemin bu bölgedeki davranışını anlamak için bu denklem çözümlenmelidir. Ama denklemin analitik çözümü olmadığından iteratif yöntemle çözümlenmelidir.

¹ $x \rightarrow x_0^+$, x in x_0 a üstten (daha büyük değerden) yaklaşması demektir. Benzer olarak $x \rightarrow x_0^-$, x in x_0 a alttan (daha küçük değerden) yaklaşması demektir.

1. Denklemdeki toplam, enerji integraline dönüştürülür.
 2. $T_0 = 0$ için bir Δ_0 verilir ve denklemin çözümünden $T_1 = T_0 + \Delta T$ için bir $\Delta_0(T_1)$ elde edilir.
 3. (2) işlemi, $T_j = T_{j-1} + \Delta T$ için bulunan $\Delta_0(T_j)$ için yeniden yapılarak $T_{j+1} = T_j + \Delta T$ için $\Delta_0(T_{j+1})$ elde edilir.
- Böylece ardışık T_j ler için $\Delta_0(T_j)$ ler elde edilmiş olur.



Şekil 5: (108) un iterasyon ile çözüm sonucu

$$\left. \frac{d\Delta(T)}{dT} \right|_{T=T_c} = \infty$$

şekil 6.2 den görülmektedir. Yani serbest enerjinin ikinci türevinde bir süreksizlik vardır, bunun anlamı ise sistemin ikinci derece bir faz geçişi gösterdiğiidir.

Sistemin ısı sığası hesaplanarakda ikinci derece faz geçişinin gözlendiği görülebilir.

$$c_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad (110)$$

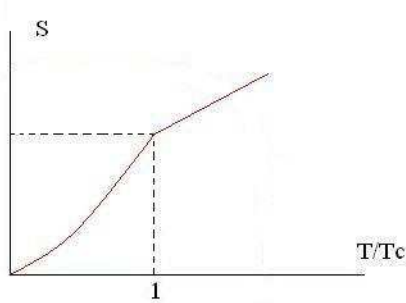
Isı sığasının hesaplanması için entropi (S) hesaplanmalıdır. Süperiletken faz için entropi

$$f_k = \frac{1}{e^{\beta E_k}}$$

olmak üzere,

$$S = 2 \sum_k [(1 - f_k) \ln(1 - f_k) + f_k \ln(f_k)] \quad (111)$$

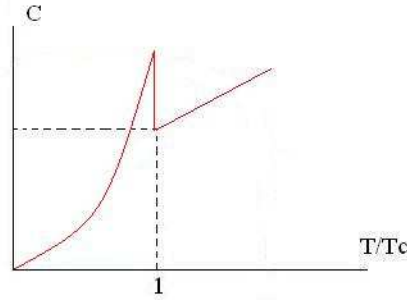
ile verilir. Toplamın içindeki ilk terim entropiye E_F altındaki seviyelerden gelen katkı, ikinci terim ise entropiye E_F üstündeki seviyelerden gelen katkıdır.



Şekil 6: süperiletken malzemenin entropisinin sıcaklıkla değişimi

Isı kapasitesinin $T = T_c$ deki davranışının sebebi (111) ile verilen entropinin sıcaklık türevinde gelen $d\Delta(T)/dT$ terimi, bu terim kritik sıcaklıkta ıraksıyordu.

Snuç olarak BCS teorisi



Şekil 7: süperiletken malzemenin ısı kapasitesinin sıcaklıkla değişimi

- Δ , T_c , $\frac{2\Delta}{T_c}$ gibi nicelikler için deneyle uyumlu sonuçlar veriyor.
- c_V , ξ eşyumluluk uzunluğu (coherence length), kritik alan, kritik akım gibi nicelikler için deneyle uyumlu sonuçlar veriyor.
- teorinin zayıf yanlarından biri sistemleri homojen kabul etmesi, dolayısıyla homojen olmayan sistemler için çalışmıyor.
- teorinin bir diğer zayıf yanı sistemleri sonsuz kabul etmesi, dolayısıyla mezoskopik düzeyde başarılı değil.

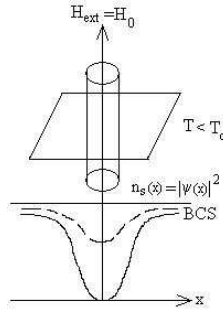
a) BCS teorisini en büyük zayıflığı sistemi homojen ibr sistem olarak tanımlamasıdır.

b) Termodinamik sistemlere bakıyor (sistemi sonsuz varsayıyor)

Mikroskopik BCS teorisine bakmak yerine makroskopik BCS teorisine bakmak daha doğrudur. Süperiletken malzemede tüm parçacıklar aynı hareketi yapmak isteyeceklerdir. Buna "phase coherence" denir.

$$\Psi(x) = \sqrt{N_s(x)} \exp\{i\theta(x)\} \quad (112)$$

Manyetik alan süperiletkenliği azaltıcı etki gösterir. Çünkü Cooper çiftleri manyetik alan yönünde yönelmek isteyeceklerdir. Sıcaklığın artması da süperiletkenliği azaltıcı etkiye sahiptir.



$$|\nabla\Psi(x)| = 0 \quad \text{ise sistem standart BCS'e gider} \quad (113)$$

$$H = H_0 + 4\pi M$$

toplam manyetik alan enerjisi

$$\int dW_H = \int_0^H M(H) dH = \frac{1}{4\pi} \int_0^H (H - H_0) dH = \frac{H^2}{8\pi} - \frac{HH_0}{4\pi}$$

"S" süperiletken, "N" normal fazı belirtmek üzere Ginzburg-Landau serbest enerji yoğunluğu fonksiyoneli

$$f_s = f_n + \frac{1}{2m^*} \Psi^* \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \left(\frac{H^2}{8\pi} - \frac{HH_0}{4\pi} \right) \quad (114)$$

denklemleri ile tanımlanır. Burada α ve β parametreleri deneyden gelecek fenomenolojik parametrelerdir. $H_0 = 0$ olduğu varsayılırsa ($H = 0$) dalga fonksiyonu homojen olacak ve bu durumda serbest enerji yoğunluğu

$$f_s = f_n + \alpha|\Psi_\infty|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi_\infty|^4 \quad (115)$$

$$\Psi(x) \Rightarrow \Psi_\infty \in \mathbb{R}$$

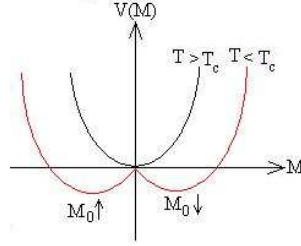
$$\frac{\delta(f_s - f_n)}{\delta\Psi_\infty} = 0 \Rightarrow 2\alpha|\Psi_\infty| + 2\beta|\Psi_\infty|^3 = 0 \quad (116)$$

denklemleri

$$\Psi_\infty = 0 \quad \text{veya} \quad \Psi_\infty^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$

koşullarında sağlanır. (Landau 1957)

$T < T_c$ 'de faz geçişini belirlemek için düzen parametresi olarak manyetizasyon seçiliyor. Landau



faz geçişi teorisine göre V potansiyeli düzen parametresinin nasıl faz geçişi gösterdiğini belirler. Ψ Cooper çiftinin dalga fonksiyonunu gösterirse

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N)|_{AS} = \Phi_1(r_1)\Phi_2(r_2)\dots\Phi_N(r_N) + \mathbb{P}_{AS} \quad (117)$$

Burada Ψ etkileşen sistemin toplam dalga fonksiyonunu, Φ etkileşmeyen parçacıklar için dalga fonksiyonunu, \mathbb{P} fermiyonlar için antisimetrik permütasyonları belirtir.

$$\int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N \Psi^* H \Psi = E_{GS} \quad (118)$$

$$\int d\vec{r} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_{N-1} \Psi^* H \Psi = E_{GS} \quad (119)$$

$\rho_1(r)$ tek parçacık yoğunluğu olmak üzere Cooper çiftlerinin sayısını belirtecek olan yoğunluk için

$$\begin{aligned} \rho_1(r) &= \int |\Psi|^2 d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N = \sum_i |\Phi_i(r)|^2 \\ \Rightarrow \rho_1(r) &= |\Phi_0(r)|^2 \end{aligned} \quad (120)$$

$\Psi_\infty = 0$ olduğu durum normal state, $\Psi_\infty^2 = \frac{n_s}{2} = -\frac{\alpha}{\beta}$ durum süperiletken state olur.

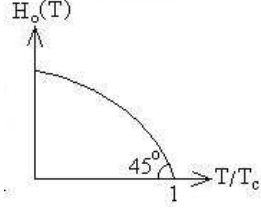
$$f_s - f_n = \alpha \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right) + \frac{\beta}{2} \frac{\alpha^2}{\beta^2} = -\frac{\alpha^2}{2\beta} < 0 \quad (121)$$

Bu denkleme göre normal state enerjisi süperiletken state enerjisinden büyük olur.

$$-\frac{H_c^2}{8\pi} = -\frac{\alpha^2}{2\beta} \Rightarrow H_c^2 = \frac{\alpha^2}{2\beta} 8\pi \quad (122)$$

$$H_0(T) \sim \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$$

$$n_s(T) \sim 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \sim 4 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$$



$$\beta(T) \simeq \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{T}{T_c}\right)\right)^2} \simeq \text{constant} > 0$$

$$|\alpha(T)| \simeq 1 - \frac{T}{T_c} \quad \alpha = -|\alpha|$$

Bazı tanımlamalar yapılırsa

$$|\Psi_\alpha|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_s}{2}$$

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{\alpha^2}{2\beta}$$

(123)

$$\alpha = -\frac{e^*2}{m^*c^2} H_c^2(T) \lambda_{\text{eff}}^2(T)$$

$$\beta = \frac{4\pi e^{*4}}{m^{*2}c^4} H_c^2(T) \lambda_{\text{eff}}^4(T)$$

Alüminyum için bazı değerler:

$$H_c^{(0)} \simeq 100 \text{ Gauss}, \quad \lambda_{\text{eff}}^{(0)} = 500 - 600 \text{ \AA}, \quad a = 3, 5 \text{ \AA}, \quad \xi_0 \cong 5000 \text{ \AA}$$

7 Ginzburg - Landau teorisi

$$U \left[\Psi, \Psi^*, \nabla \Psi, \vec{A}, \vec{\nabla} \times \vec{A}, \dots \right] = \int d\vec{r} f_s(\vec{r}) \quad (124)$$

Sınır koşulları olarak

$$\frac{\delta U}{\delta \Psi^*} = 0 \quad \frac{\delta U}{\delta \vec{A}} = 0 \quad (125)$$

$$\Psi^* \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi = \Psi^* \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \Psi + \underbrace{\vec{\nabla}(\dots)}_{\text{yuzey terimleri}} \quad (126)$$

$$\frac{\delta}{\delta \Psi^*} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi = \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi \quad (127)$$

$$\frac{\delta}{\delta \Psi^*} \left(\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 \right) = \alpha \Psi + \beta \Psi^2 \Psi^* = \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi \quad (128)$$

Bu durumda I.Ginzburg-Landau denklemi olarak adlandırılan denklem:

$$\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (129)$$

$$\frac{\delta U}{\delta \vec{A}} = 0$$

ise

$$\begin{aligned} & \int_V d\vec{r} \left\{ \frac{\delta}{\delta \vec{A}} \left[\frac{1}{2m^*} \Psi^* \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \Psi \right] \right. \\ & + \frac{\delta}{\delta \vec{A}} \frac{1}{8\pi} \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \\ & \left. - \frac{1}{4\pi} \frac{\delta}{\delta \vec{A}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{H}_0 \right\} \end{aligned} \quad (130)$$

$$a \cdot (\nabla \times b) = b \cdot (\nabla \times a) - \nabla(a \times b)$$

özdeşliği kullanılarak yukarıdaki ifadenin ilk terimi

$$-\frac{e^*}{c}(-i\hbar)\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \frac{e^*}{c}i\hbar(\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi + \left(\frac{e^*}{c}\right)^2|\Psi|^2 2\vec{A} \quad (131)$$

ikinci ve üçüncü terimler sırasıyla

$$\delta\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A} \times \delta\vec{A}) \quad (132)$$

$$\delta\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_0) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{H}_0 \times \delta\vec{A}) \delta\vec{A} = 0 \quad (133)$$

Bu durumda

$$\frac{\delta U}{\delta \vec{A}} = 0$$

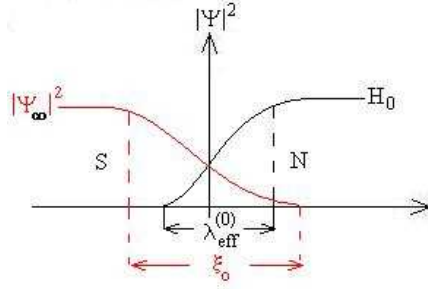
$$\delta\vec{A} \left\{ \frac{e^*}{2m^*c} i\hbar [\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - (\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi] + \frac{e^{*2}|\Psi|^2}{m^*c^2} \vec{A} \right\} + \frac{1}{4\pi} \delta\vec{A} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad (134)$$

Bu durumda II.Ginzburg-Landau denklemi olarak adlandırılan denklem:

$$\frac{i\hbar e^*}{2m^*c} [\Psi^*(\vec{\nabla}\Psi) - (\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi] + \frac{e^{*2}|\Psi|^2}{m^*c^2} \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (135)$$

Sınır koşulları:

$$\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c}\vec{A} \right) \Psi|_{\Sigma} = 0 \quad (136)$$



$$\xi(T) \gg \lambda_{\text{eff}}(T), \sigma > 0 \Rightarrow \quad \text{Tip-I Süperiletkenlik}$$

$$\xi(T) \ll \lambda_{\text{eff}}(T), \sigma < 0 \Rightarrow \quad \text{Tip-II Süperiletkenlik}$$

Bu fluxlar malzeme içinde boyuna ve enine osilasyonlara yol açıyorlar.
I.Ginzburg-Landau denklemi ($H = 0$)

$$\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (137)$$

$$\Psi_\infty = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{\beta}$$

$$\frac{\Psi}{|\Psi_\infty|} = f \in \mathbb{R}$$

tanımları kullanılarak boyutsuz GL denklemine ulaşmak için denklemi $\frac{1}{|\alpha|\Psi_\infty}$ ile çarparsak:

$$\frac{1}{2m^*} \Psi_\infty (-i\hbar)^2 \nabla^2 f - |\alpha| \Psi_\infty f + \beta \Psi_\infty^3 f^3 = 0 \quad (138)$$

denklemi düzenlenirse

$$\frac{-\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \nabla^2 f - f + f^3 = 0 \quad (139)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m^*|\alpha|} = \xi^2(T)$$

coherence length (eşuyum uzunluğu) olarak tanımlanır.

$$f = 1 - g(x) \quad g \ll 1$$

$$\begin{aligned} -f + f^3 &= -(1 - g) + (1 - g)^3 \\ &= -1 + g + 1 - 3g + O(g^2) = -2g \end{aligned}$$

$$\xi^2 \frac{d^2 g}{dx^2} - 2g = 0 \Rightarrow g(x) = A \exp\{-\sqrt{2}x/\xi\} + B \exp\{\sqrt{2}x/\xi\} \quad (140)$$

bu durumda

$$f(x) = 1 - \exp\{-\sqrt{2}x/\xi\} \quad (141)$$

Eğer manyetik alan olsaydı:

$$\frac{e^{*2}}{m^*c^2} |\Psi|^2 \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (142)$$

Gauge transformasyonu kullanarak

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (143)$$

$$\frac{e^{*2} |\Psi|^2}{m^*c^2} \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \vec{A} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi e^{*2} |\Psi_\infty|^2}{m^*c^2} \vec{A} \quad (144)$$

$$A_j \sim a_j \exp\{-x/\lambda_{\text{eff}}\} + b_j \exp\{x/\lambda_{\text{eff}}\} \quad (145)$$

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{m^*c^2}{4\pi e^{*2} |\Psi_\infty|^2} \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \quad (146)$$

Yüzey enerjisini hesaplamak için

$$\sigma = \int d\vec{r} [f_s(H) - f_s(0)] = a \int_{-\infty}^{\infty} dx [f_s(H) - f_s(0)] \quad (147)$$

Manyetik alan uygulandığında malzemenin kendini hemen büzüp büzmediğini belirlemeyi sağlayan alan başına yüzey enerjisine bakarsak

$$\frac{\sigma}{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dx [f_s(H) - f_s(0)] \quad (148)$$

$$f_s(0) = f_n(0) - \frac{H_c^2}{8\pi} \quad (149)$$

$$f_s(H) - f_s(0) = f_s(H) + \frac{H_c^2}{8\pi} - f_n(0) \quad (150)$$

$$f_s(H) - f_s(0) = \frac{1}{2m^*} \Psi^* \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{HH_0}{4\pi} \quad (151)$$

denkleminin her iki tarafına $\frac{H^2}{8\pi}$ eklenir ve denklem düzenlenerek alan başına yüzey enerjisini hesaplamak istenirse $\vec{H}/\vec{H}_z = H_0 = H_c$ olsun. Gauge transformasyonu altında vektör potansiyeli $\vec{A} = H(0, A_y, 0)$ seçilirse

$$\frac{\sigma}{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \Psi^* \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi + \frac{(H - h_c)^2}{8\pi} \right\} \quad (152)$$

$$\Psi = \Psi_{\infty} f$$

$$\frac{\sigma}{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \alpha |\Psi|^2 f^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi_{\infty}|^4 f^4 + \frac{1}{2m^*} \Psi_{\infty}^2 \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right)^2 f + \frac{(H - h_c)^2}{8\pi} \right\} \quad (153)$$

Bu denklemi $\frac{1}{|\alpha||\Psi_{\infty}|^2}$ ile çarparsak

$$\frac{\sigma}{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\alpha| \Psi_{\infty}^2 \left\{ -f^2 + \frac{\beta}{2|\alpha|} |\Psi_{\infty}|^2 f^4 + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}}_{\xi^2} f \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right)^2 f + \frac{(H - H_c)^2}{8\pi|\alpha|\Psi_{\infty}} \right\} \quad (154)$$

$$\Psi_{\infty}^2 = \frac{|\alpha|}{\beta} \quad \frac{H_c^2}{4\pi} = \frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{|\alpha|}{2} \Psi_{\infty}^2$$

$$\underbrace{\Phi_0 = \frac{hc}{e}}_{\text{Normal flux quantum}} \quad \underbrace{\Phi_0 = \frac{hc}{2e}}_{\text{Süperiletken flux quantum}}$$

Bu durumda alanca yüzey enerjisi için ifade

$$\frac{\sigma}{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{H_c^2}{2\pi} \left\{ -|f|^2 + \frac{1}{2} |f|^4 + \xi^2 f^* \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 A^2 \right] f + \frac{(H - H_c)^2}{4H_c^2} \right\} \quad (155)$$

Birinci ve ikinci Ginzburg-Landau denklemlerinin bir korunumlu hareket sabiti vardır. Elde edilen alanca yüzey enerjisi denklemini direkt çözmek yerine GL denklemlerinden yararlanarak çözmek daha uygun olacaktır.

I.GL denklemi

$$\xi^2 \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 A^2 \right] f - f + |f|^2 f = 0 \quad (156)$$

II.GL denklemi

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{4\pi e^{*2} |\Psi|^2}{m^* c^2} \vec{A} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial f'^2}{\partial f} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial A'^2}{\partial A} \quad (157)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} f' = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f'}{\partial f} = f' \frac{\partial f'}{\partial f} = \frac{1}{2} \frac{\partial f'^2}{\partial f} \quad (158)$$

kullanılarak

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f'^2}{\partial f} = \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 A^2 f - \frac{1}{\xi^2} f + \frac{1}{\xi^2} |f|^2 f \quad f \in \mathbb{R} \quad (159)$$

$$\frac{1}{2} f'^2 + \text{sabit} = \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 \int df A^2 f - \frac{f^2}{2\xi^2} + \frac{f^4}{4\xi^4} \quad (160)$$

Bu denklemin sağ tarafındaki ilk terimine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int df A^2 f = A^2 \frac{f^2}{2} - \int \frac{f^2}{2} 2A dA \quad (161)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial A'^2}{\partial A} = \underbrace{\frac{4\pi e^{*2}}{m^* c^2} |\Psi_\infty|^2}_{1/\lambda_{\text{eff}}^2} A f^2 \quad (162)$$

$$dA \cdot \frac{\partial A'^2}{\partial A} = \frac{2}{\lambda_{\text{eff}}^2} A f^2 \cdot dA \Rightarrow dA'^2 = \frac{2A f^2}{\lambda_{\text{eff}}^2} dA \quad (163)$$

Elde edilen bu ifadeyi kısmi integrasyon uygulanan ifadede yerine koyarsak

$$\int df A^2 f = A^2 \frac{f^2}{2} - \int \underbrace{\frac{\lambda_{\text{eff}}^2}{2} d(A')^2}_{\frac{\lambda_{\text{eff}}^2}{2} (A')^2} = A^2 \frac{f^2}{2} - \frac{\lambda_{\text{eff}}^2}{2} (A')^2 \quad (164)$$

$$\frac{1}{2} f'^2 = \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 \left[\frac{A^2 f^2}{2} - \frac{\lambda_{\text{eff}}^2}{2} (A')^2 \right] - \frac{f^2}{2\xi^2} + \frac{f^4}{4\xi^4} + \text{sabit} \quad (165)$$

Sabit terimi belirlemek için sınır kuşullarından yararlanır:

$$x \rightarrow -\infty \quad \Psi \rightarrow \Psi_\infty \quad f' = 0, f = 1 \quad H_0 \Rightarrow A, A' = 0 \Rightarrow \text{sabit} = \frac{1}{2}$$

Bu durumda alan başına yüzey enerjisi

$$\frac{\sigma}{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{H_c^2}{2\pi} \left[\underbrace{\xi^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}_{>0} + \underbrace{\frac{H}{2H_c} \left(\frac{H}{H_c} - 1 \right)}_{<0} \right] = \frac{H_c^2}{2\pi} (\xi - \lambda_{\text{eff}}) \quad (166)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \xi^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sim \xi \quad (167)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{H}{2H_c} \left(\frac{H}{H_c} - 1 \right) \sim -\lambda_{\text{eff}} \quad (168)$$

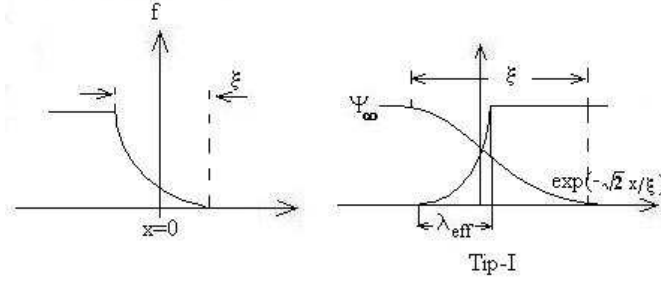
Bu durumda arayüz enerjisi her iki işaretle de olabilir:

Tip-I süperiletkenlik için $\xi > \lambda_{\text{eff}} \Rightarrow \sigma > 0$

Tip-II süperiletkenlik için $\xi < \lambda_{\text{eff}} \Rightarrow \sigma < 0$ Ginzburg-Landau parametresi

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sim 0) \quad (169)$$

H_{c2} 'nin devreye girdiği nokta $a < \lambda_{\text{eff}}$ (flux lattice melting) olup her bir flux'ın λ_{eff} değeri diğerlerinininki ile çakışmaya başlar ve malzeme manyetik alanı tümüyle içine alır.



8 Sınır Etkisi (Proximity effect)

I.GL denklemi

$$\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi(x) + \alpha\Psi(x) + \beta|\Psi^2(x)|\Psi(x) = 0 \quad (170)$$

$\vec{A} \neq 0$ durumunda bu denklem nümerik metotlarla çözülebilirken $\vec{A} = 0$ halinde denklemin tam çözümü bulunabilir. $\vec{B} = 0$ ise $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ \vec{A} 'nin sıfır olmasını gerektirmez. Saf ayar alanları (pure gauge field) elektromanyetik alanın vakum çözümlerine denk geliyor.

$$\exp\left\{\frac{ie^*}{\hbar c} \int \vec{A} \cdot d\vec{l}\right\} \Psi(r) \rightarrow \Psi(r) = \exp\{i\theta(r)\} \sqrt{|\Psi|^2} \quad (171)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\varphi$$

F.London gauge altında $\vec{A} = 0$ ise $\theta(r) = \theta_0 = \text{sabit}$ olup dalga fonksiyonu reelidir.

$$\Psi(x) = \Psi_\infty f(x)$$

I.Ginzburg-Landau denklemi, Ψ_∞ 'nin homojen limitte $\vec{B} = 0$ çözümü olduğu bilindiğinden

$$-\frac{\Psi_\infty \hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dx^2} f + \alpha\Psi_\infty f + \beta\Psi_\infty^3 f^3 = 0 \quad (172)$$

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{df'^2}{df}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \frac{d^2}{dx^2} f + f - f^3 = 0 \quad (173)$$

$$\frac{\xi^2}{2} \frac{df'^2}{df} + f - f^3 = 0 \quad (174)$$

$$x \rightarrow -\infty \quad f' = 0 \quad f = 1 \quad \text{sabit} = 1/4 - 1/2 = -1/4$$

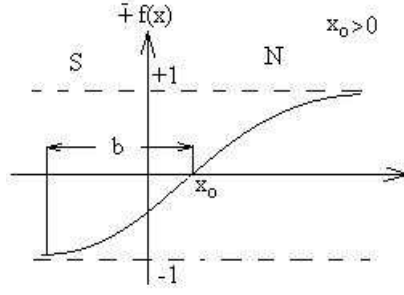
$$\cdot 2 \int \frac{\xi^2}{2} f'^2 + \text{sabit} = \int (f^3 - f) df = \frac{f^4}{4} - \frac{f^2}{2} \quad (175)$$

$$\xi^2 f'^2 + \text{sabit} = \frac{f^4}{2} - f^2 \quad \text{sabit} = 1/2 - 1 = -1/2 \quad (176)$$

$$\Rightarrow \xi^2 f'^2 = \frac{f^4}{2} - f^2 + \frac{1}{2} \quad (177)$$

$$\left(\frac{df}{dx} \right)^2 = \frac{1}{\xi^2} (1 - 2f^2 + f^4) = \frac{1}{\xi^2} (1 - f^2)^2 \quad (178)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \sqrt{\frac{1}{2\xi^2}} (1 - f^2) \quad (179)$$

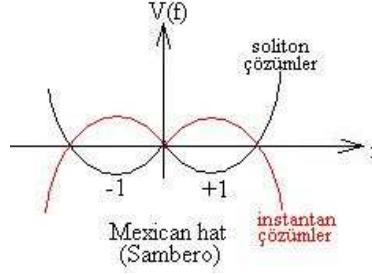


denkleminin çözümü

$$f(x) = \pm \tanh\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}\xi}\right) \quad (180)$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty &\Rightarrow \tanh x \rightarrow -1 \\ x \rightarrow +\infty &\Rightarrow \tanh x \rightarrow +1 \\ x = 0 &\Rightarrow \tanh x = 0 \end{aligned}$$

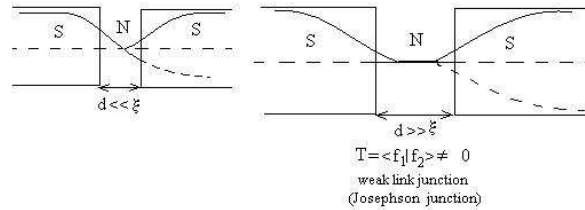
NOT: $Hf = Ef$ $H = \left(-\xi^2 \frac{d^2}{dx^2} + 1 - f^2\right)$ olup nonlinear bir denklemdir. I.GL denklemi $E = 0$ yani minimum enerji çözümlerini oluşturur. $V(f) = -\frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4}$



Birinci ve ikinci Ginzburg-Landau denklemleri ve sınır koşulundan

$$\begin{aligned} \vec{n} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) \Psi|_{\Sigma} &\neq 0 \\ &= \frac{\Psi(\Sigma)}{b} \text{ (de Gennes sınır koşulu)} \end{aligned} \quad (181)$$

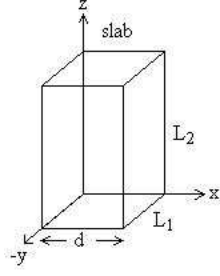
$b \simeq \sqrt{2}\xi \simeq \xi \simeq 500\text{\AA}$ Bu tür koşullarda genellikle $d = 50 - 100\text{\AA}$ civarında olmaktadır.



9 İnce filmde süperiletkenlik

L_1, L_2 termodinamik nicelikler olup sonsuza giderler. f 'nin 1'den büyük mü küçük mü olduğu araştırılırsa: I.Ginzburg-Landau denklemi

$$\frac{1}{2m^*} \left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (182)$$



\vec{H}_0/\hat{z} olmak üzere $d \ll \lambda_{\text{eff}}$ olduğunda sistem içindeki manyetik alan hiç bir zaman sıfıra inmeyecektir. $\vec{A} \neq 0$ $\Psi = \Psi^*$ $|\Psi| = \text{sabit} \neq |\Psi_\infty|$ olup dalga fonksiyonu reel değildir.

$$\Psi = |\Psi| \exp\{i\varphi(\vec{r})\} \quad (183)$$

II. Ginzburg-Landau denklemi:

$$\frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{e\hbar}{2im^*} \left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi \right) - \frac{e^* |\Psi|^2}{m^* c} \vec{A} \quad (184)$$

$$\vec{J}_s = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (185)$$

$$\begin{aligned} \Psi^* \vec{\nabla} \Psi - (\nabla \Psi^*) \Psi &= |\Psi| e^{-i\varphi(r)} |\Psi| i\varphi e^{i\varphi(r)} \\ &\quad + |\Psi| i\varphi e^{-i\varphi(r)} |\Psi| e^{i\varphi(r)} \\ &= |\Psi|^2 2i \vec{\nabla} \varphi \end{aligned} \quad (186)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= \frac{e\hbar}{2im^*} |\Psi|^2 2i - \frac{e^* |\Psi|^2}{m^* c} \vec{A} \\ &= \left(\frac{e\hbar \vec{\nabla} \varphi}{m^*} - \frac{e^*}{m^* c} \vec{A} \right) |\Psi|^2 \\ &= \frac{e\hbar}{m^*} \left(\vec{\nabla} \varphi - \frac{2}{c\hbar} \vec{A} \right) |\Psi|^2 \end{aligned} \quad (187)$$

$$\frac{e^*}{\hbar c} = \frac{2e}{\hbar c} 2\pi = \frac{2\pi}{\Phi_0}$$

$$\vec{J}_s = \frac{e\hbar}{m^*} \left(\vec{\nabla} \varphi - \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \right) = n_s e^* v_s \quad (188)$$

$$v_s = \frac{\hbar}{m^*} \left(\vec{\nabla} \varphi - \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \right) \quad (189)$$

$$\frac{|\Psi|}{2m^*} \left(\hbar \vec{\nabla} \varphi - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right)^2 + \alpha |\Psi| + \beta |\Psi|^3 = 0$$

$$\frac{|\Psi|}{2m^*} \frac{m^{*2}}{\hbar^2} v_s^2 + \alpha |\Psi| + \beta |\Psi|^3 = 0$$

$$\frac{|\Psi|}{\hbar^2} \frac{1}{2} m^* v_s^2 + \alpha |\Psi| + \beta |\Psi|^3 = 0$$

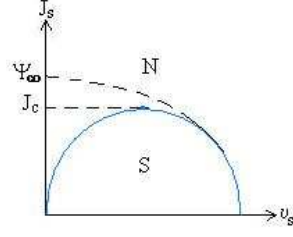
$$\frac{1}{2\hbar^2} m^* v_s^2 - |\alpha| + \beta |\Psi|^2 = 0$$

$$\vec{J}_s = e^* |\Psi|^2 v_s \quad (190)$$

$$|\Psi|^2 = \frac{|\alpha|}{\beta} - \frac{|\alpha|}{\beta} \frac{m^* v_s^2}{2\hbar^2 |\alpha|} = \frac{\alpha}{\beta} \left[1 - \frac{m^* v_s^2}{2\hbar^2 |\alpha|} \right] \quad (191)$$

$$\frac{|\Psi|^2}{\Psi_\infty^2} = 1 - \frac{m^* v_s^2}{2\hbar^2 |\alpha|} \leq 1 \quad (192)$$

$$\Rightarrow \vec{J}_s = e^* |\Psi|^2 v_s = e^* \Psi_\infty^2 \left[1 - \frac{m^* v_s^2}{2\hbar^2 |\alpha|} \right] v_s \quad (193)$$



$$\frac{\partial J_s}{\partial v_s} = e^* \Psi_\infty^2 \left[1 - \frac{3m^* v_s^2}{2\hbar^2 |\alpha|} \right] = 0 \quad (194)$$

$$\Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{2\hbar^2 |\alpha|}{3m^*}} \quad (195)$$

Bu durumda kritik akıma ilişkin ifade

$$\vec{J}_c = e^* \Psi_\infty^2 \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2|\alpha|}{3m^*}} \quad (196)$$

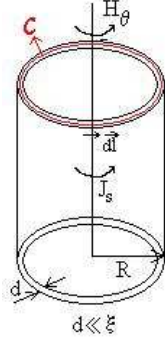
$$J_c \sim \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2}$$

$$J_c = \frac{cH_c(T)}{3\sqrt{6}\pi\lambda(T)}$$

$$H_c(T) \sim \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda^2(T)} \sim \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$$

9.1 Little-Parks deneyi



İnce film olduğu için boyu sabit varsayılacaktır. Faz sıfırdan farklıdır.

$$\Psi(\vec{r}) = |\Psi|e^{i\varphi(r)} \quad (197)$$

$$mv_s = \left(\hbar \vec{\nabla} \varphi - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \quad (198)$$

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{m}{\hbar} v_s + \frac{e^*}{\hbar c} \vec{A} \quad (199)$$

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{m}{\hbar} v_s + \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \quad (200)$$

$$\oint_C \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} = \frac{m}{\hbar} \oint_C \vec{v}_s \cdot d\vec{l} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \underbrace{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}_{\Phi(\text{manyetik akı})} \quad (201)$$

$$\varphi(2\pi) - \varphi(0) = \frac{m}{\hbar} \oint_C \vec{v}_s \cdot d\vec{l} + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (202)$$

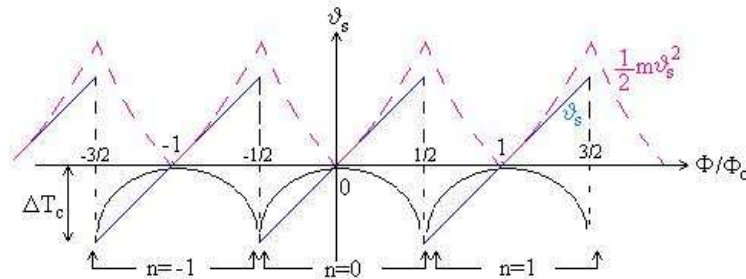
$$2n\pi = \frac{m}{\hbar} 2\pi R v_s + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (203)$$

$$n = \frac{m}{\hbar} R v_s + \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (204)$$

bu durumda

$$v_s = \frac{\hbar}{mR} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (205)$$

$$\Psi(r) = |\Psi|e^{i\varphi(r)} = |\Psi|e^{in\theta} \quad (206)$$



$$v_s^{\max} = \frac{\hbar}{2mR} \quad v_s^{\min} = 0 \quad (207)$$

$$\frac{|\Psi|^2}{|\Psi_\infty|^2} = 1 - \frac{m^* v_s^2}{2\hbar^2 |\alpha|} \quad (208)$$

$$|\Psi|^2(T) = A \left(1 - \frac{T}{T_c(v_s)} \right) \quad (209)$$

$$\frac{|\Psi|^2 - \Psi_\infty^2}{\Psi_\infty^2} = \frac{\hbar c}{8H_c^2(0)\lambda_{\text{eff}}^2(0)R^2} \quad (210)$$

$\hbar c = 2000eV \cdot \text{\AA}$, $mc^2 = 0,5MeV$, $R = 7.10^3 \text{\AA}$ olmak üzere

$$\frac{v_s^{\text{max}}}{c} = \frac{\hbar c}{2m^* R c^2} = \frac{1}{7} \cdot 10^{-6} \quad \frac{v_F}{c} \cong 2.10^{-3} \quad \frac{v_s^{\text{max}}}{v_F} \sim 10^{-2}$$

Bu değerlerden de görüldüğü gibi süperakışkan hızı Fermi hızına göre oldukça yavaştır. Uyguladığımız manyetik alan $n\Phi_0$ tam katı ise sıvı hızı 0 olur. Ancak eğer $n\Phi_0$ 'ye $\Delta\Phi$ kadar arttırma yapılması halinde malzeme içerisinde oluşacak süperakım yaklaşık sonsuza dek sürecektir (teorik hesaplamalar ~ 10000 yılı öngörmektedir).

Süperiletkenler belirli bir manyetik alanın etkisi altında vortex oluşturabiliyorlar. H manyetik alanın şiddeti arttırıp birinci kritik alan değerini (H_{c_1}) aştığında girdaplar oluşmaktadır. Ancak bunlar birbiriyle etkileşmemektedir. Dış manyetik alan şiddeti ikinci kritik alanın (H_{c_2}) değerine ulaştığında madde normal hale geçer.

$$\begin{aligned} H_{c_1} < H < H_{c_2} &\implies \text{girdap durumları} \\ H_{c_2} < H &\implies \text{normal hal} \end{aligned}$$

1.Ginzburg-Landau denklemi:

$$\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e^* \vec{A}}{c} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (211)$$

2.Ginzburg-Landau denklemi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi e^* \hbar}{2im^* c} \left[\Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) - (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi \right] \quad (212)$$

Dalga fonksiyonu zamana göre ters invariant olmadığı için kompleks olarak seçilmelidir.

$$\begin{aligned} B(x, t) &\neq B(x, -t) \\ \Psi(x, t) &\neq \Psi(x, -t) \\ \Psi(\vec{r}) &= \Psi_\infty f(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})} \end{aligned} \quad (213)$$

Bu dalga fonksiyonunu 1.GL denkleminde yerine yazar ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa:

$$-\frac{1}{\xi^2} \left(-i\vec{\nabla} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \right)^2 f(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})} + f(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})} - f^3(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})} \quad (214)$$

$$\varphi_s(\vec{r}) = n \arctan \left(\frac{y(s)}{x(s)} \right) = n\theta \quad (215)$$

$$\implies \boxed{\Psi(\vec{r}) = \Psi_\infty f(\vec{r}) e^{in\theta}} \quad (216)$$

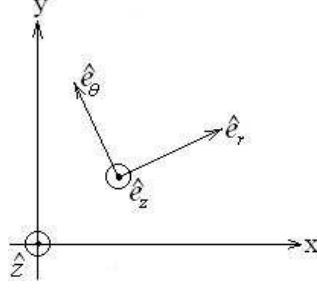
H gibi bir manyetik alanın z yönünde uygulandığı durumu ele alalım.

$$\vec{H} = H_0 \hat{z} \quad (217)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{H} \quad (218)$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \right) \quad (219)$$

$$\vec{A} = (A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta) \quad (220)$$



$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (221)$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (222)$$

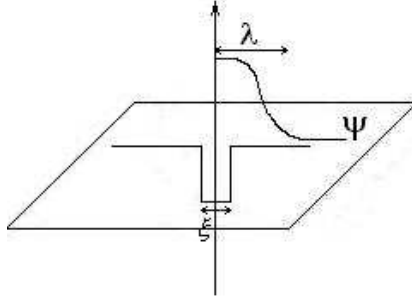
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_r \hat{e}_r + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \partial_\theta) \times (A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta) \quad (223)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \hat{e}_z \partial_r A_\theta + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \partial_\theta \times (A_r \hat{e}_r) + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \partial_\theta \times (A_\theta \hat{e}_\theta) \\ \Rightarrow &= \hat{e}_z \partial_r A_\theta + \frac{A_r}{r} \hat{e}_\theta \times (\underbrace{\partial_\theta \hat{e}_r}_{\hat{e}_\theta}) + A_\theta + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \times (\underbrace{\partial_\theta \hat{e}_\theta}_{-\hat{e}_r}) \end{aligned} \quad (224)$$

$$= \hat{e}_z (\partial_r A_\theta + \frac{A_\theta}{r}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = H_0$$

$$\Rightarrow \frac{A_\theta}{r} + \partial_r A_\theta = H_0 \quad (225)$$

$$A_\theta(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r' H_0(r') dr' \quad (226)$$



$$\vec{A} = \frac{\hat{e}_\theta}{r} \int_0^r r' H_0 r' dr' \quad (227)$$

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = \Phi_0 \quad (228)$$

$$\vec{A}(0) \cong \vec{A}(\vec{r}) \Big|_{r < \xi} = \frac{\hat{e}_\theta H_0(0)}{r} \int_0^r r' dr' = \frac{\hat{e}_\theta H_0(0)}{r} \frac{r^2}{2} \Big|_{r < \xi} \quad (229)$$

$r < \xi$ koşulu altında manyetik alan sabit alınabilir.

$$\Rightarrow \vec{A}(0) = \frac{H_0(0)r}{2} \hat{e}_\theta \quad (230)$$

$$d\vec{l} = r d\theta \hat{e}_z$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi_0 \quad (231)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \Big|_{r \gg \lambda} = \frac{\Phi_0 \hat{e}_\theta}{2\pi r} \quad (232)$$

bulduğumuz bu ifadeyi (4) denkleminde yerine yazıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında:

$$-\xi^2 \left[-\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \left(\frac{n}{r} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 \right] f + f - f^3 = 0 \quad (233)$$

$n = 0$ girdapsız çözüm

$n = 1$ tek girdaplı çözüm

$$r \cong 0 \quad (r \ll \xi) \quad f^3 \ll f$$

$$-\xi^2 \left[-\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \left(\frac{n}{r} - \frac{2\pi H_0(r)}{\Phi_0} \right)^2 \right] f + f - f^3 = 0 \quad (234)$$

Bu denklem analitik olarak çözmek mümkün değildir. Ancak numerik olarak çözebiliriz.

$$f(r) \Big|_{r \ll \xi} = Cr^\alpha \quad (\alpha \geq 0) \quad (235)$$

$$\alpha^2 - n^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm n$$

$\alpha = 1$ için:

$$\Psi(r) \Big|_{r \ll \xi} = Cre^{i\theta} \quad (236)$$

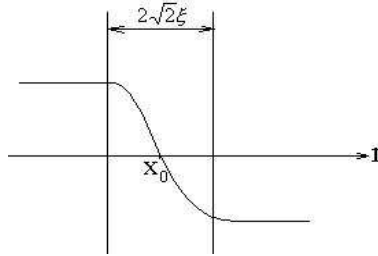
n girdap için:

$$\Psi(r) \Big|_{r \ll \xi} = Cr^n e^{in\theta} = Cz^n \quad (237)$$

$$\Psi(r) \Big|_{r \gg \xi} = \Psi_\infty e^{in\theta} \quad (238)$$

$$-\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - f + f^3 = 0 \quad (239)$$

$$f(x) = \tanh \frac{x - x_0}{\sqrt{2}\xi} = \begin{cases} \pm 1 \\ \frac{x}{\sqrt{2}\xi} \end{cases} \quad (240)$$



$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_\infty e^{i\theta} \tanh \frac{r}{\sqrt{2}\xi} \quad (r \geq 0 \text{ ise}) \quad (241)$$

$A(\vec{r}) = ? \quad H(\vec{r}) = ?$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi e^* \hbar}{m^* c} \Psi_\infty^2 \vec{\nabla} \varphi - \frac{4\pi e^* \Psi_\infty^2}{m^* c} \vec{A} \quad (242)$$

$$\varphi = n\theta$$

$$\vec{\nabla} \varphi = n \vec{\nabla} \theta = n \frac{\hat{e}_\theta}{r}$$

$$\vec{\nabla} = (\partial_r \hat{e}_r + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \partial_\theta)$$

$r \ll \xi$ durumunda:

$$\frac{|\Psi|^2}{\Psi_\infty^2} \ll 1 \quad (243)$$

$$\lambda_{\text{eff}}^2 \sim \frac{1}{|\Psi|^2} \rightarrow \infty \quad (244)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi e^* \hbar}{m^* c} \psi_\infty^2 \left(\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi}_{2\pi n \delta^{(2)}(\vec{r}) \hat{e}_z} - \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{H}} \right) \quad (245)$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{eff}}^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{H} = 2\pi n \delta^{(2)}(\vec{r}) \hat{e}_z \quad (246)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{\nabla}^2 \vec{H} + \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H})}_0 \quad (247)$$

$$\Rightarrow -\lambda_{\text{eff}}^2 \nabla^2 \vec{H}_z + \vec{H}_z = 2\pi \delta^{(2)}(\vec{r}) \quad (248)$$

$$[-\lambda_{\text{eff}}^2 (-k^2) + 1] \tilde{H}_z = 2\pi n \quad (249)$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_z = \frac{2\pi n}{1 + k^2 \lambda_{\text{eff}}^2} \quad (250)$$

$$H_z(\vec{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{2\pi n}{1 + k^2 \lambda_{\text{eff}}^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (251)$$

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_n(kr) e^{in\theta} \quad (252)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{in\theta} = \delta_{m,0} = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \quad (253)$$

Buna göre (41) denklemi yeniden düzenlenirse:

$$A_z(r) = \int_0^{\infty} \frac{k dk}{2\pi} \frac{2\pi n}{1 + k^2 \lambda^2} J_0(kr) \quad (254)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{k dk}{2\pi} \frac{2\pi n}{1 + k^2 \lambda^2} J_0(kr) = K_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{dk k J_0(x)}{k^2 + 1} \rightarrow \text{Mac Donald Fonksiyonu} \quad (255)$$

$$K(x) = \begin{cases} \ln(1/x) & x \ll 1 \\ \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} & x \gg 1 \end{cases} \quad (256)$$

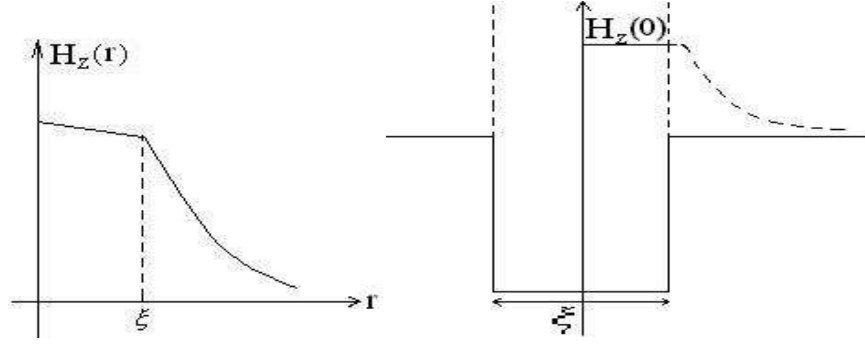
$$K(x) \alpha H_0(ix) \rightarrow \text{Hankel Fonksiyonu} \quad (257)$$

$$H_z(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda^2} \left(\frac{\pi \lambda_{\text{eff}}}{2 r} \right)^{1/2} e^{-r/\lambda_{\text{eff}}} \quad (r \gg \lambda) \quad (258)$$

$$H_z(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda_{\text{eff}}^2} \left| \ln \frac{\lambda}{r} \right| \quad (\xi \ll r \ll \lambda) \quad (259)$$

Bu manyetik alanın değeri Abrikosov tarafından daha ayrıntılı olarak hesaplanmış ve Sov.Phys.JETP 5, 1174(1957) sayılı makalede:

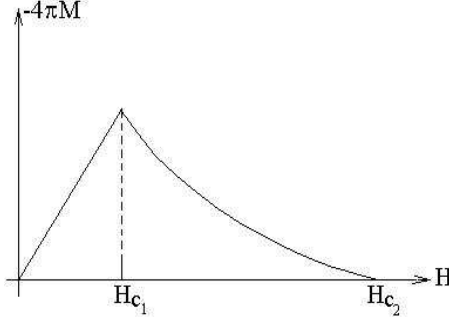
$$H_z(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda_{\text{eff}}^2} \left| \ln \frac{\lambda}{r} + 0.18 \right| \quad (\xi \ll r \ll \lambda) \quad (260)$$



olarak verilmiştir.

$$H_z(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_{\text{eff}}^2} \ln \frac{\lambda}{\xi} \quad (r < \xi) \quad (261)$$

$$\Delta G \simeq \frac{H_z(0)}{8\pi} + \Delta E_{\text{sc}} \quad (262)$$



$$H_T = H + 4\pi M \quad \rightarrow 0 \quad (263)$$

$$-4\pi M = -H \quad (264)$$

$$H_z(0) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{\text{eff}}^2} \ln \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\xi} \quad (265)$$

$$\lambda_{\text{eff}} = 100\xi$$

$$\lambda_{\text{eff}} = 500\text{\AA}$$

$$\Phi = \frac{hc}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2$$

$$H_z(0) = \frac{2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2}{4\pi \cdot 25 \cdot 10^4 \text{\AA}^2} \ln 100 \cdot 10^{16} \quad (266)$$

$$H_z(0) = 10^3 \underbrace{\ln 100}_{\sim 2} \text{ Gauss} \approx 0.1 \text{ Tesla} \quad \rightarrow 5\text{\AA} \text{ yarıçaplı bölgede oluşan manyetik alan} \quad (267)$$

Manyetik alandan dolayı sistemin sahip olduğu enerji:

$$E_M = \int \frac{h(r)H_z(r)}{4\pi} d\vec{r} \quad (268)$$

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m^*} \vec{\nabla} \varphi - \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \quad (269)$$

$$E_{\text{kin}} = \Psi^* \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \quad (270)$$

$$\Psi \cong \Psi_{\infty} e^{i\theta} \quad (\varphi = \theta) \quad (271)$$

$$E_{\text{kin}} = \int d\vec{r} \Psi_{\infty}^2 \frac{1}{2m^*} v_s^2 \quad (272)$$

$$E_{\text{kin}} + E_M = \epsilon_1 \quad \rightarrow \text{(bir akı kuantumuna karşılık gelen enerji)} \quad (273)$$

$$\epsilon_1 = \int d\vec{r} \left[\Psi_{\infty}^2 \frac{m^*}{2} \frac{\hbar^2}{m^{*2}} \left(\vec{\nabla} \theta - \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \right)^2 \right] + \int \frac{H_0}{4\pi} h(\vec{r}) d\vec{r} \quad (274)$$

$$\epsilon_1 = L \left\{ \int d\vec{\sigma} \left[\Psi_{\infty}^2 \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\vec{\nabla} \theta - \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \right)^2 \right] + \frac{H_0}{4\pi} \int h(\vec{r}) d\vec{\sigma} \right\} \quad (275)$$

$$\int h(\vec{r}) d\vec{\sigma} = \Phi_0 \quad (276)$$

$$\int d\sigma \left[\frac{\Psi_{\infty}^2 \hbar^2}{2m^*} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{4\pi}{\Phi_0} \frac{A_{\theta}}{r} + \frac{4\pi^2}{\Phi_0^2} (\vec{\nabla} \times h)(\vec{\nabla} \times h) \right) \right] \quad (277)$$

$$A_\theta(0) \cong \frac{1}{2}H(0)r \quad (278)$$

$$A_\theta(r)|_{r \ll \lambda} \cong \frac{\Phi_0}{2\pi r} \quad (279)$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla}\theta - \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\right)^2 &= \vec{\nabla}\theta\vec{\nabla}\theta - \frac{4\pi}{\Phi_0}\vec{\nabla}\theta \cdot \vec{A} + \frac{4\pi^2}{\Phi_0^2} \\ &= \frac{\Psi_\infty^2 \hbar^2}{2m^*} \frac{4\pi^2}{\Phi_0^2} \int d\sigma \vec{\nabla} \times \vec{h} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{h} \end{aligned} \quad (280)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{h} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{h} &= \vec{h}(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{h}) - \vec{\nabla}((\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{h}) \\ &= C \int d\sigma \vec{h}(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{h}) \end{aligned} \quad (281)$$

$$\begin{aligned} \int dV \frac{\Psi_\infty^2 m^*}{2} v_s^2 &= \int dV \frac{\Psi_\infty^2 m^*}{2} \left(\frac{\hbar}{m^*}\right)^2 \left(\vec{\nabla}\theta - \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dV \frac{8\pi\Psi_\infty^2 \hbar^2}{2m^*} \left(\vec{\nabla}\theta - \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dV \frac{4\pi\Psi_\infty^2 \hbar^2}{m^*} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2 \end{aligned} \quad (282)$$

$$\begin{aligned} J_s &= e^* \Psi_\infty^2 v_s \\ &= \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{H} \end{aligned} \quad (283)$$

$$\Rightarrow E_{\text{kin}} = \int dV \frac{\Psi_\infty^2 m^*}{2} v_s^2 \frac{J_s^2}{e^{*2} \Psi_\infty^4} = \frac{1}{8\pi} \int dV \underbrace{\frac{m^* c}{\Psi_\infty^2 e^{*2}} \left(\frac{c}{4\pi}\right)}_{\lambda_{\text{eff}}^2} \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (284)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{8\pi} \int dV \lambda_{\text{eff}}^2 \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (285)$$

$$E_M + E_{\text{kin}} = \int \frac{H(r)H_z(r)}{4\pi} d\vec{r} + \frac{1}{8\pi} \int H(\vec{r})H(\vec{r})dV \quad (286)$$

$$E_{\text{TOP}} = \frac{H_0}{4\pi} \Phi_0 L + \frac{1}{8\pi} \int dV H(\vec{r})H(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \int dV \lambda_{\text{eff}}^2 \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (287)$$

$$E = \frac{H_0 \Phi_0 L}{4\pi} + \frac{1}{8\pi} \int dV \left[H^2 + \lambda_{\text{eff}}^2 \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \right] \quad (288)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H}) - \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \vec{H})}_{=0} \quad (289)$$

özdeşliğini kullanarak:

$$E = \frac{H_0 \Phi_0 L}{4\pi} + \frac{L}{8\pi} \int d\sigma \vec{H} \cdot \underbrace{\left[\vec{H} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} \right]}_{2\pi\Phi_0 \delta^{(2)}(\vec{r}) \vec{e}_z} \quad (290)$$

$$\int d\sigma \vec{H} \cdot \left[\vec{H} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} \right] = 2\pi\Phi_0 H(0) \quad (291)$$

$$E = -\frac{H_0 \Phi_0 L}{4\pi} + \frac{L}{8\pi} 2\pi\Phi_0 H(0) \quad (292)$$

Dolayısıyla tek bir akı kuantumuna karşılık gelen enerji:

$$E = \frac{L}{4} \Phi_0 H(0) \quad (293)$$

olarak elde edilir. Buradan birim uzunluk başına düşen enerji:

$$\frac{E}{L} = \frac{1}{4} \Phi_0 H(0) = \frac{1}{4} \Phi_0 \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{\text{eff}}^2} \ln \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\xi} \quad (294)$$

$$\implies \frac{E}{L} = \frac{\Phi_0^2}{16\pi\lambda_{\text{eff}}^2} \ln \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\xi} \quad (295)$$

$$E = \int \frac{H_{c1} h(r)}{8\pi} dV \quad (296)$$

$$\frac{E}{L} = \int H_{c1} h(r) 8\pi d\sigma \quad (297)$$

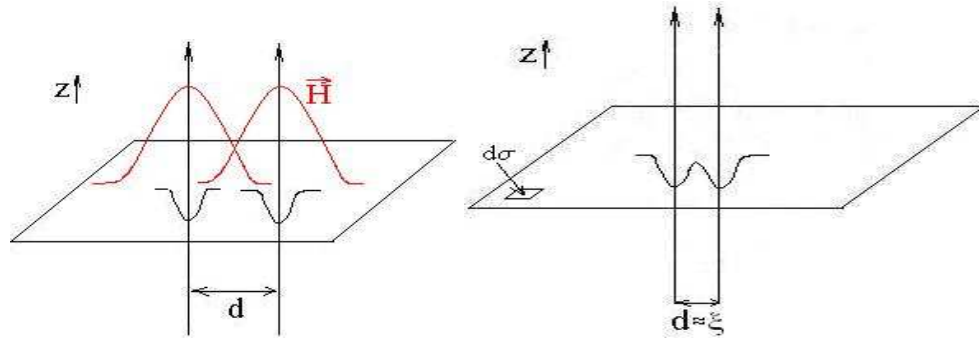
$$\implies \frac{H_{c1}}{8\pi} \int h(r) dA = \frac{E}{L} \quad (298)$$

$$\implies H_{c1} = \frac{8\pi E}{\Phi_0 L} \quad (299)$$

$$H_{c1} = \frac{8\pi}{\Phi_0} \frac{\Phi_0^2}{16\pi\lambda_{\text{eff}}^2} \ln \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\xi} \quad (300)$$

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi 2\lambda_{\text{eff}}^2} \ln \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\xi} \quad (301)$$

10 Girdap-Girdap Etkileşimi



$\epsilon_1 \rightarrow$ bir girdabı oluşturmak için gerekli olan enerji olmak üzere:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int d\sigma \vec{H}_T [\vec{H}_T + \lambda_{\text{eff}}^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H}_T] \quad (302)$$

1 girdap için:

$$\lambda_{\text{eff}}^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{H} = \Phi_0 \delta^{(2)}(\vec{r}) \hat{e}_z \quad (303)$$

2 girdap için:

$$\implies \lambda_{\text{eff}}^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{H} = \Phi_0 [\delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_1) + \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_2)] \hat{e}_z \quad (304)$$

$$\implies \vec{H}_T = H_1(\vec{r}) + H_2(\vec{r}) \quad (305)$$

$$\implies \vec{H}_T = \underbrace{h(\vec{r} - \vec{r}_1)}_{h_1} + \underbrace{h(\vec{r} - \vec{r}_2)}_{h_2} \hat{e}_z \quad (306)$$

İki girdap arasındaki etkileşim enerjisi:

$$\epsilon_2 - 2\epsilon_1 = \Delta\epsilon \quad (307)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda tanımlanan toplam manyetik alan ifadesi matematiksel olarak aşağıdaki ifadeye benzerdir:

$$(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab \quad (308)$$

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon &= \frac{L}{8\pi} \int d\sigma \left\{ (h_1 + h_2)[(h_1 + h_2) + \lambda^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (h_1 + h_2)] - 2h(h + \lambda^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{h}) \right\} \\ &= \frac{L}{8\pi} \int d\sigma \left\{ h_1[h_2 + \lambda^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times h_2] + h_2[h_1 + \lambda^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times h_1] \right\} \end{aligned} \quad (309)$$

$h(\vec{r}) = h(|\vec{r}|)$ özelliği göz önünde bulundurularak tek girdap için:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon &= \frac{2L}{8\pi} \int d\sigma \vec{h}(\vec{r} - \vec{r}_1) [\vec{h}(\vec{r} - \vec{r}_2) + \lambda^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times h(\vec{r} - \vec{r}_2)] \\ &= \frac{L}{4\pi} \Phi_0 \int d\sigma h(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_2) = \frac{L}{4\pi} \Phi_0 h(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \end{aligned} \quad (310)$$

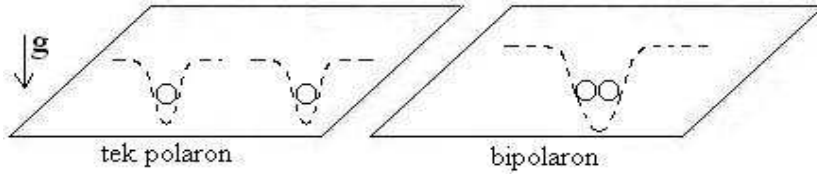
sonucu elde edilir.

$$\implies \Delta\epsilon = \frac{L\Phi_0}{4\pi} h(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (311)$$

Dolayısıyla girdap-girdap etkileşiminde birim uzunluk başına potansiyel enerji:

$$\frac{\Delta\epsilon}{L} = \frac{\Phi_0}{4\pi} h(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (312)$$

olarak bulunur. Bu sonuç $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \gg \xi$ koşulu için geçerlidir.



1.girdabın 2.'ye uyguladığı kuvvet = - 2.girdabın 1.'ye uyguladığı kuvvet olduğuna göre:

$$-\left(\frac{F_{1 \rightarrow 2}}{L}\right) = \left(\frac{F_{2 \rightarrow 1}}{L}\right) = \vec{\nabla}_2 \frac{\Delta\epsilon}{L} \quad (313)$$

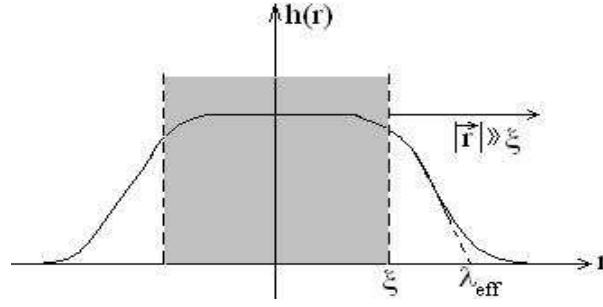
$$\left(\frac{F_{2 \rightarrow 1}}{L}\right) = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \vec{\nabla}_2 h(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (314)$$

$$(F_{2 \rightarrow 1})_x = A \nabla_{x_2} h_z = (\vec{\nabla} \times \vec{h})_y \quad (315)$$

NOT: $(\vec{\nabla} \times h)_y = \underbrace{\partial_z h_x - \partial_x h_z}_0$

$$\implies \partial_x h_z = -(\vec{\nabla} \times h)_y$$

$$\implies (F_{2 \rightarrow 1})_x = -A(\vec{\nabla} \times h)_y = -(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \times \frac{\Phi_0}{4\pi} \quad (316)$$

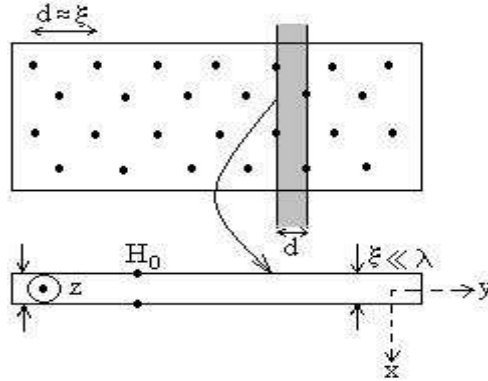


$$\Rightarrow (F_{2 \rightarrow 1})_x = \frac{\Phi_0}{4\pi} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \quad (317)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_s \quad (318)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\vec{\Phi}_0}{c} \times \vec{J}_s \quad (319)$$

Her girdap üzerine etki eden kuvvet sıfır olursa denge durumu elde edilir.
Girdapların birleşmeye başladığı andaki manyetik alan 2.kritik manyetik alandır (H_{c2}).



$$\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi + \alpha\Psi + \beta\Psi^3 = 0 \quad (320)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}^2} \vec{A} \quad (321)$$

NOT:

$\Psi \rightarrow 0$ ise $\lambda \rightarrow \infty$ gider.

$\lambda^{-2} \sim |\psi|^2$

$\frac{1}{\lambda^2} = C\Psi_\infty^2 f^2 = \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}^{2(0)}} f^2$

$\frac{\lambda_{\text{eff}}^{2(0)}}{\lambda^2} \sim f^2 \rightarrow 1$

$$\frac{1}{\lambda_{\text{eff}}^{2(0)}} = \frac{4\pi e^{*2} \Psi_\infty^2}{m^* c^2} = \text{sabit} \quad (322)$$

$$H \left(x = \pm \frac{d}{2} \right) = H_0 \quad (323)$$

$$A_y = a \cosh \frac{x}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} + b \sinh \frac{x}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} \quad (324)$$

$$H_z \left(x = \pm \frac{d}{2} \right) = H_0 = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \partial_x A_y|_{x=d/2} \quad (325)$$

$$H_z(x) = \partial_x A_y = \frac{a}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} \sinh \frac{x}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} + \frac{b}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} \cosh \frac{x}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} \quad (326)$$

$$H_0 = H_z \left(\frac{d}{2} \right) = \frac{a}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} \sinh \frac{x}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} + \frac{b}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} \cosh \frac{x}{\lambda_{\text{eff}}^{(0)}} \quad (327)$$

$$H_z \left(-\frac{d}{2} \right) = -\frac{a}{\lambda} \sinh \frac{d}{2\lambda} + \frac{b}{\lambda} \cosh \frac{d}{2\lambda} = H_0 \quad (328)$$

$$H_0 = \frac{b}{\lambda} \cosh \frac{d}{2\lambda} \quad (329)$$

$$\implies b = \frac{H_0 \lambda}{\cosh \frac{d}{2\lambda}} \quad a = 0 \quad (330)$$

$d \sim \xi$ ve $x \leq d$ durumunda

$$A_y = H_0 \lambda \frac{\sinh x/\lambda}{\cosh d/2\lambda} \quad (331)$$

ifadesini seriye açarsak:

$$A_y = H_0 \lambda \frac{x}{\lambda} \simeq H_0 x \quad (332)$$

$$\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \partial_x \hat{e}_x - \frac{e^*}{c} H_0 x \hat{e}_y \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta \Psi^3 = 0 \quad (333)$$

$$\frac{1}{2m^*} \left(-\hbar^2 \partial_x^2 + \left(\frac{e^*}{c} \right)^2 H_0^2 x^2 \right) \Psi + \alpha \Psi + \beta \Psi^3 = 0 \quad (334)$$

$\xi \frac{\partial_x \Psi}{\Psi} \ll 1$ limitinde $\Psi = \text{sabit} < \Psi_\infty$

$$\implies \left(\frac{e^*}{c} \right)^2 \frac{H_0^2}{2m^*} x^2 + \underbrace{\alpha}_{-|\alpha|} + \beta \Psi^2 = 0 \quad (335)$$

$$\implies \Psi^2 = \frac{|\alpha|}{\beta} \left(1 - \left(\frac{e^*}{c} \right)^2 \frac{H_0 x^2}{2m^* |\alpha|} \right) \quad (336)$$

$$\implies \Psi^2 = \Psi_\infty^2 \left(1 - \left(\frac{e^*}{c} \right)^2 \frac{H_0 x^2}{2m^* |\alpha|} \right) \quad (x \leq d \leq \xi) \quad (337)$$

$\xi_2 = \frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|}$ olduğu göz önünde bulundurularak:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Psi}{\Psi_\infty} \right|^2 &= \left[1 - \frac{e^{*2} \hbar^2 H_0^2 x^2}{\hbar^2 2m^* |\alpha| c^2} \right] \\ &= \left[1 - \xi^2 x^2 H_0^2 \left(\frac{e^*}{\hbar c} \right)^2 \right] \\ &= \left[1 - \xi^2 x^2 H_0^2 \frac{4\pi^2}{\phi_0^2} \right] \end{aligned} \quad (338)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Psi}{\Psi_\infty} \right|^2 &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} dx \left[1 - \xi^2 x^2 H_0^2 \frac{4\pi^2}{\phi_0^2} \right] \\ &= \frac{1}{d} \left(d - \xi^2 \frac{d^3 H_0^2 4\pi^2}{12 \phi_0^2} \right) \\ &= \left(1 - \xi^2 \frac{d^2 H_0^2 4\pi^2}{12 \phi_0^2} \right) \end{aligned} \quad (339)$$

$$\implies H_{c_2}^2 = \frac{12 \Phi_0^2}{\xi^4 4\pi^2} \quad (340)$$

$$\implies H_{c_2} = \frac{\sqrt{3}\Phi_0}{\xi^2} \approx \frac{\Phi_0}{2\xi^2} \quad (341)$$

$$\implies H_{c_1} = \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi} \quad (342)$$

NOT: Al için

$$\xi = 500\text{\AA}$$

$$\lambda = 5000\text{\AA}$$

$$\Phi_0 = 2 \times 10^{-7} Gcm^2$$

$H_{c_1} \approx 100G$ verileri kullanılarak iki kritik alan arasında aşağıdaki karşılaştırmayı yapmak mümkündür:

$$\frac{H_{c_1}}{H_{c_2}} = \frac{\frac{\Phi_0}{8\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}}{\frac{\Phi_0}{2\xi^2}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\xi}{\lambda} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi} \quad (343)$$

$$\frac{H_{c_1}}{H_{c_2}} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{100} \quad (344)$$

$$\implies \frac{H_{c_1}}{H_{c_2}} \cong 10^3 \quad (345)$$

$$\implies H_{c_2} = 10^5 G = 10T \quad (346)$$