SOLİTON YÜZEYLERİ

Metin Gürses

Matematik Bölümü, Bilkent Üniversitesi

Özet. Matematiğin farklı iki konusunu bir araya getirmeye çalışacağız. Bunlardan ilki oldukça klasik bir konu, $\mathbf{R}^3$ deki yüzeyler. Klasik ve modern diferansiyel geometrinin başlangıcı olarak kabul edilen düzgün yüzeyler artık üzerinde fazla çalışılmayan konulardan biridir. Diğeri ise 1960 ların ortalarında temelleri atılan ve gün geçtikçe matematiğin her dalında yer bulan *integre edilebilen sistemler* ya da kısaca *soliton teorisi* diye adlandıracağımız bir konu. Bu derlemede bu iki konu arasındaki ilişkiler ve bu konudaki son gelişmeler mümkün alduğunca verilmeye çalısılacaktır.

Yaşayan Türkçe Derlemeler No.1
Türk Matematik Derneği Ankara Şubesi Etkinliği:
Mayıs 2001

İÇİNDEKİLER

1. Giriş	03-04
2. $\mathbf{R}^3$ de eğriler	05-06
3. $\mathbf{R}^3$ de yüzeyler.	07-10
4. Integre Edilebilen Denklemler	11-12
5. Eğrilerden Denklemlere	13-15
6. Denklemlerden Yüzeylere	16-18
7. Soliton Yüzeyleri	19-23
8. Bazı Özel Yüzeyler	24-27
9. Sonuç	28
KAYNAKLAR	

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri ve kısmi diferansiyel denklemler (KDD) matematiğin farklı konuları gibi görünselerde herhangi birini çalışırken diğerini kullanmamak mümkün değildir. Özellikle (KDD) teorisi diferansiyel geometri kavramları kullanmadan başarılı olamaz. Örnek olarak birinci dereceden doğrusal olmayan KDD teorisi tamamen $\mathbf{R}^n$ deki düzgün yüzeyler teorisidir. Bu tür örnekleri çoğaltmak mümkündür. Örnek olarak $\mathbf{R}^3$ de sabit Gauss eğrilikli yüzeyleri sinüs-Gordon ($K > 0$), sinh-Gordon ($K < 0$), Laplace ($K = 0$) denklemlerinin çözümleri belirler. 1965 lerden sonra integre edilebilir denklemler üzerine yoğunlaşan ilgi ile birlikte diferansiyel geometri teknikleri daha çok kullanılır hala gelmiştir. *Sıfır eğrilik formülasyonu*, *Cartan diferansiyel ideali*, *Backlund dönüşümleri*, *Ayar dönüşümleri* gibi kavramlar buna örnek olablir. Epey bir süre yüzey teorisi kullanılarak integre edilebilir denklemler teorisi için hem yeni denklem sınıfları hem de yeni çözüm teknikleri ortaya cıkarmak için uğraş verilmiştir. Hala bu yoldan giden epey araştırıcı bulunmaktadır. Ben de zaman zaman bu yolu kullananlardan biriyim. Son 15-20 senedir bazı araştırıcılar integre edilebilir denklemlere ve onların çeşitli deformasyonlarına (simetri değişimlerine) karşı gelen yüzeyleri aramaya başladılar. Son zamanlarda bu yönde ilgi artmaya başlamıştır. Bu yolla integre edilebilir denklemler teorisinin işe yarayabilecek teknikleri kullanarak diferansiyel geometriye ve bilhassa $\mathbf{R}^3$ deki yüzeyler teorisine katkı yapabilmek mümkün olabilicektir. En azından bazı yüzeylerin karakterizasyonu ve sınıflandırılmaları daha kolay olabilecektir. *Deformasyon* ile anlatılmak istenen denklemlerin çözümlerini cözümlere götüren değişikliklerdir, yada bir anlamda simetrilerdir. Burada bunlara üç örnek vereceğiz. Lax denklemlerinin özdeğer parametresi, ayar dönüşümleri ve simetrilerdir. Burada simetrilerden kasıt yalnız klasik Lie simetrileri değil aynı zamanda genelleştirilmiş simetrilerde düşünülmektedir. Genel simetriler integre edilebilir sistemlerin artık vazgeçilmez özelliklerinden biridir. *Integre edilebilme* özelliği bu tür simetrilerin varlığı ile tanımlanabilmektedir. Eğer bir denklem simetri adım operatörü (*recursion operator*) kabul ediyorsa bu tür simetrilerden sonsuz tane vardır. Dolayısıyle göreceğizki integre edilen denklemlerin sonsuz tane simetri (deforme) yüzey-

leri vardır. Biz bu özet makalede bu tür yüzeylere daha ağırlık vereceğiz. Çünki bu konu daha güncel ve ilginç görünmektedir.

Biz burada yalnız $\mathbf{R}^3$ deki eğriler ve yüzeylerle ilgileneceğiz. Yüksek boyutlu uzaylarda ve değişik sinyatürlü geometrilerde benzer şekilde ilişkiler kurulabilir. Örneğin Lorteweg-de Vries (KdV) denklemine karşı gelen simetri yüzeyleri $\mathbf{R}^3$ de değil üc boyutlu bir Minkowski geometrisi, M_3 de yer alır. Bunun gibi pek çok önemli denklemler aynı sekilde başka uzaylarda yer alırlar. Bu tür yüzeylerden yeri geldiğinde uygun bölümlerde bahsetmeye çalışacağız.

Bu makalede ilk önce diferansiyel geometrik kavramları, eğriler ve yüzeyler gibi, tekrar edeceğiz. Daha sonra integre edilebilir denklemlerin temel başlangıç noktası sayılabilecek Lax formulasyonunu tanıtacağız. Daha sonraki bölümlerde geometrik yapılarla soliton denklemleri arasındaki önemli iliskileri kurmaya çalışıp bir kaç örnek vereceğiz. Kaynaklar olarak önemli bir kaç kaynak vereceğiz fakat konunun bütün kaynaklarını veremeyeceğiz. Zaten bunada imkan yok. Verdiğimiz kitap ve derleme türü kaynaklardan pekçok diger kaynaklara da ulaşmak mümkün olacaktır. $\mathbf{R}^3$ deki eğriler ve yüzeyler için [**eis1**], [**man1**] gibi kaynaklar yeterli olacaktır. Daha genel uygulamalar için, m boyutlu uzayların (geometrilerin) n boyutlu uzaylar (geometriler) içinde olabilme şartları, *Gauss-Weingarten-Codazzi-Ricci* denklemleri için [**spi1**] ve [**eis2**] ye bakınız. $\mathbf{R}^3$ deki yüzeylerin *Gauss-Weingarten-Codazzi* denklemlerini diferansiyel formlar cinsinden ifadeleri için [**fla1**] kaynağına bakınız. Solitonlar kuramı için pek-çok kaynak verilebilir fakat eğitici olmaları açısından [**abl1**], [**abl2**] ve [**dra1**] en uygun bulduğum kaynaklardır. Özellikle [**dra1**] kullanılarak Matematik yada Fizik bölümlerinde bir lisans dersi verilebilir. Bunların dışında vermiş olduğumuz kaynaklar soliton yüzeyleri ve eğrileri üzerine olan teknik makalelerdir. Bu makaleler konunun diğer kayda değer çalışmalarından da bahsederler.

Son olarak belirtmek istediğim bir noktada bu notların seviyesi hakkındadır. Farklı disiplindeki araştırıcılar ve Lisans Üstü (Master ve Doktora) öğrencilerin de kolayca anlayabileceğini umduğum bir seviye tutturmaya çalıştım. Bu notların konuyu bilenlere getireceği herhangi bir yenilik olmayacaktır.

2. EĞRİLER

$\mathbf{R}^3$ de bir eğriyi $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ şeklinde bir aralık I dan $(\mathbf{R}^3)$ e bir gönderim olarak tanımlarız. Düzgün bir eğri her noktasında tanımlı ve türevlenebilir bir teğet kabul eder. Eğer $t \in I$ ise $\alpha(t)$ eğrinin her noktasındaki durum vektörünü belirler. Her noktadaki teğet vektörü $\mathbf{t} = \frac{d\alpha}{dt}$ olarak verilir. Biz burada genellikten hiç bir şey kaybetmeden t parametresini yay uzunluğu parametresi olarak kabul edeceğiz. Böyle bir durumda teğet vektörünün boyu bir olacaktır , $|\mathbf{t}| = 1$. Bu başlangıç ile eğrinin her noktasında tanımlı ve o noktadaki uzayın bazını oluşturacak bir üçlü $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, inşa etmek mümkündür. Eğer $<,>$, $\mathbf{R}^3$ deki standart iç çarpımı tanımlarsa bu üçlü bu çarpıma göre ortonormal bir set oluşturur. Yani

$$< \mathbf{t}, \mathbf{t} >=< \mathbf{n}, \mathbf{n} >=< \mathbf{b}, \mathbf{b} >= 1. \tag{1}$$

Diğer çarpımlar sıfırdır. Bu üçlüye *Serre-Frenet* üçlüsü denir ve eğri üzerindeki değişimi aşagıdaki Serret-Frenet (SF) denklemleriyle verilir.

$$\dot{\mathbf{t}} = k\,\mathbf{n}, \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}, \tag{3}$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \tau\mathbf{n}, \tag{4}$$

burada bir harfin üzerindeki nokta t parametresine göre türevi işaret eder, k ve τ eğriyi karakterize eden *eğrilik* ve *burulma* fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar eğriyi tamamen belirlerler (dönme ve öteleme simetrik olan yüzeyleri aynı kabul ediyoruz, *izometrik yüzyeler*). SF denklemlerinin daha kapalı fakat ilerde işimize yarayacak matris şekilini verelim. $E = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})^T$ ve

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

olsun. Dikkat edilirse Ω anti-simetrik ve izi sifir olan bir matristir. SF denklemelri bunlar cinsinden basitce

$$\frac{dE}{dt} = \Omega\, E, \tag{6}$$

şeklinde yazılabilir. Düzgün eğriler ile ilgilendiğimizden, biz burada her iki fonksiyonuda (k ve τ) her mertebeden türevlenebilir olarak kabul edeceğiz. Gerçi bu şart hafifletilebilir ama biz k ve τ fonksiyonlarının yeterli türevlenebilir fonksiyonlar olarak alacağız. Düzlem eğrilerinde burulma sıfır ($\tau = 0$) olduğundan yukardaki denklemler daha basittir. İlerde kullanacağımız için bu halide verelim

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}, \tag{7}$$

$$\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} \tag{8}$$

Göreceğizki pekçok integre edilebilir denklemer için düzlem eğrileri yeterli olacaktır.

Eğer $\mathbf{R}^3$ yerine farklı bir uzay Minkowski M_3 uzayını alsaydık yukardaki denklemler biraz farklı olacaktı. Eğer $<,>$, M_3 deki iç çarpım ise , burada ortonormal baz $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$

$$< \mathbf{t}, \mathbf{t} >= 1, \quad < \mathbf{n}, \mathbf{n} >= -1, \quad < \mathbf{b}, \mathbf{b} >= -1, \tag{9}$$

diklik şartlarını sağlar. Bu diklik şartlarıyla SF denklemleri

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}, \tag{10}$$

$$\dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}, \tag{11}$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \tau\mathbf{n}, \tag{12}$$

şeklini alır. Göreceğizki bazı denklemlere ait eğriler $\mathbf{R}^3$ de yer almayacaklar. Dolayısıyle sinyatür değişikliği oldukça önemli olacaktır. SF denklemlerinin değişik sinyatürden üç boyutlu geometrilerde ifadesi ve soliton denklemleri ile ilişkisi için [**gür1**] kaynağına bakınız.

3. YÜZEYLER

$\mathbf{R}^3$ de yüzeyler $X : \Omega \to \mathbf{R}^3$ bir açık küme $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ den $\mathbf{R}^3$ ye bir gönderme olarak tanımlarız. Yüzeyin her noktasındaki konum vektörü, $(u, v) \in \Omega$ ise $X(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$ şeklinde verilir. Düzgün yüzeylerle uğraşacağımızdan, eğrilerdeki SF üçlüsü gibi yüzeylerin her noktasında tanımlı ve o noktadaki $\mathbf{R}^3$ ün bazını oluşturacak bir üçlü $\{X_u, X_v, N\}$ tanımlamak mümkündür. Burada X_u ve X_v konum vektörünün, $X(u, v)$, sırasıyla, u ve v ye göre kısmi türevleridir ve yüzeyin ilgili noktasındaki teğet vektörleridir. Yani o noktadaki teğet uzayının bazını teşkil ederler. N ise yüzeyin her noktasında türevlenebilir birim normal vektörüdür. Düzgün yüzeylerde bu vektör $N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$ şeklinde verilir. Yüzeyin her noktasında tanımlı olan bu üçlünün değişimini veren denklemlere , *Gauss-Weingarten denklemleri* denir ve şöyle verilirler: $x^a = (u, v)$ olsun ve yüzeyin teğet vektörlerini kısaca X_a, $a = 1, 2$ şeklinde verirsek Gauss-Weingarten (GW) denklemleri aşağıdaki şekli alır.

$$X_{ab} = \Gamma^c_{ab} X_c + h_{ab} N, \tag{13}$$

$$N_a = -g^{cd} h_{da} X_c, \tag{14}$$

burada tekrarlanan indeksler üzerinden 1 den 2 ye kadar toplam var kabul edeceğiz. Birinci ve ikinci temel form katsayıları sırasıyla g_{ab} ve h_{ab} dir. Temel formlar aşağıdaki şekilde bulunabilirler

$$g_{ab} =< X_a, X_b >, \quad h_{ab} =< N, X_{ab} >= - < N_a, X_b > . \tag{15}$$

Yukardaki ifadelerdende anlaşılcağı gibi her iki katsayı matrisi indekslerine göre simetriktir. Burada $<, >$, $\mathbf{R}^3$ deki vektörlerin standart iç çarpımıdır. Diğer taraftan g^{ab} ise g nin tersi olan g^{-1} matrisinin elemanlarıdır. Burada g'ye bazen metrik tensörüde denilmektedir. Yüzeyin bütün iç yerel özelliklerini g sayesinde tayin etmek mümkündür. Γ^a_{bc} Christoffel sembolüdür ve

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} [g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}] \tag{16}$$

şeklinde verilir. Yüzeylerde GW denklemleri, eğriler için SF denklemlerine eşdeğerdirler. Yalnız SF denklemleri adi diferansiyel denklemler olduklarından tutatarlılık problemleri yoktur. Oysa GW denklemleri kısmi diferansiyel denklemlerdir. Bu nedenle tutarlılıkları kontrol edilmelidir. Yukardaki (13) denklemlerini yeniden türevleyip her iki tarafın anti-simetrik kısmını alırsak yeni iki denklem sınıfı ile karşılaşırız. Bu denklemlere *Gauss-Codazzi* denklemleri adı verilir ve sırasıyla aşağıdaki şekildedirler

$$R^a_{bcd} = g^{ae}\,(h_{ec}h_{bd} - h_{ed}h_{bd}), \tag{17}$$

$$h_{ab,c} - \Gamma^e_{ac}h_{eb} = h_{ac,b} - \Gamma^e_{ab}h_{ec}, \tag{18}$$

burada R^a_{bcd} Riemann eğrilik tensörünün bileşenleridir. Yukardaki ilk denklem Gauss diğeri ise Codazzi denklemleri olarak bilinirler. Bu denklemlere ilave yeni tutarlılık denklemleri yoktur. Yani antisimetrik türevleme burada kapanmaktadır. $\mathbf{R}^3$ de bir yüzeyi karakterize eden değişmezler Gauss ,K, ve ortlama ,H, eğrilikler $G = g^{-1}\,h$ matisinin determinantı ve izi olarak verilirler

$$K = \det(g^{-1}\,h), \quad H = \frac{1}{2}\,iz\,(g^{-1}\,h) \tag{19}$$

Şimdi yerel olarak şöyle bir önerme yapabiliriz

Önerme 1. *$X_u(u,v)$ ve $X_v(u,v)$, $\mathbf{R}^3$ de türevlenebilir bağımsız vektörler olsun. Eğer $X_{u,v} = X_{v,u}$ ise bu vektörleri her noktasında teğet vektörü olarak kabul eden bir yüzey vardır ve (izometrik olanlar dışında) tekdir.*

Bu önermenin önemi, konum vektörü $X(u,v)$ verilmeden yüzeyin yerel özelliklerini tayin etmenin mümkün olmasıdır. Temel formlar (15), Gauss ve ortalama eğrilikleri de (19) denklemlerinden bulunabilir. Bunlarda ilgili yüzeyin yerel özelliklerini tayin etmede yeterli olacaktır. Bazen temel formları çizgi elemanları ile gösteririz.

$$ds^2_I = g_{ab}\,dx^a\,dx^b, \quad ds^2_{II} = h_{ab}\,dx^a\,dx^b. \tag{20}$$

Çok bilinen bir örnek, birinci temel formun katsayılarını

$$ds_I^2 = \sin^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2, \tag{21}$$

şeklinde alırsak yüzeyin Gauss eğriliği

$$\theta_{uu} - \theta_{vv} = \frac{1}{2}\, K\, \sin 2\theta, \tag{22}$$

denklemini sağlar yada birinci temel formu

$$ds_I^2 = du^2 + dv^2 - 2\cos\theta\, dudv, \tag{23}$$

şeklinde alırsak Gauss eğriliği

$$\theta_{uv} = K \sin\theta, \tag{24}$$

denklemini sağlar. Farklı gibi görünselerde yukardaki temel formların tanımladığı yüzeyler izometriktirler (benzerdirler). Gauss eğriliğinin sabit olması durumunda ise sinüs Gordon denkleminin çeşitli şekillerini görmüş olmaktayız. Bu yüzeylerin $\mathbf{R}^3$ de olabilmeleri için ikinci temel form katsayılarını bulmalıyız , öyleki GC tutarlılık denklemleri sağlansın. Bu tür yüzeylere klasik örnek küre yüzeyidir. Burada $h = g$ dir ve birim kürede yüzeyin her noktasında $K = 1$ ve $H = 1$ dir. Sinüs-Gordon denklemi ve küre yüzeyi ilişkisi çok klasik bir örnektir. Kökeni Bianchi, Backlund gibi matematikcilere kadar gider. Tarihçe için Eisenhart'ın kitabına bakmak yeterli olabilir [**eis1**].

İlerde yararlı olacağı için $\mathbf{R}^3$ deki vektörleri $su(2)$ cebrinin 2×2 matris temsilleri cinsinden ifade edeceğiz. Bunu yapmak için bu temsildeki baz elemanlarını, yani Pauli-sigma matrislerini kullanacağız.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

$\mathbf{R}^3$ deki herhangi bir X vektörünü $su(2)$ değerli temsili

$$F = i \sum_{k=1}^{k=3} X^k\, \sigma_k, \tag{26}$$

şeklindedir, burada $X^k,\ (k=1,2,3)$ ler X vektörünün bileşenleridir. Yukardaki tanım (26) daha açık olarak

$$F = i \begin{pmatrix} X^3 & X^1 - i\,X^2 \\ X^1 + i\,X^2 & -X^3 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Bu temsilde iki vektörün iç çarpımı $< X, Y >$ aşagıdaki şekilde verilir

$$< F, G >= -\frac{1}{2} iz\,(F\,G) = \sum_{k=1}^{k=3} X_k\,Y_k \tag{28}$$

öyleki G de Y vektörünün $su(2)$ temsilidir. Bir vektörün boyu ise

$$|F| = \sqrt{< F, F >} \tag{29}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer F konum vektörü $X(u,v)$ nin $su(2)$ temsili ise F_u ve F_v teğet vektörleri X_u ve X_v nin $su(2)$ temsilleri olur. Birim normal vektörü N nin ise $su(2)$ temsiline Z dersek,

$$Z = \frac{[F_u, F_v]}{|[F_u, F_v]|}, \tag{30}$$

şekilinde bulunur. Burada $[A, B] = AB - BA$ dır. Böylece yüzeyin her noktasında tanımlı üçlünün $su(2)$ temsilini verebiliriz.

$$\{F_u, F_v, Z\} \tag{31}$$

Herhangi bir şekilde bu üçlünün tayini , önerme 1 den dolayı yüzeyin tesbiti anlamına gelir. Soliton teorisinde genellikle yüzeyler bu yolla inşa edilir. Bu yolla temel formlar ise

$$g = \begin{pmatrix} < F_u, F_u > & < F_u, F_v > \\ < F_u, F_v > & < F_v, F_v > \end{pmatrix}, \quad h = -\begin{pmatrix} < F_u, Z_u > & < F_u, Z_v > \\ < F_v, Z_u > & < F_v, Z_v > \end{pmatrix} \tag{32}$$

olarak verilir, dolayısiyle yüzey eğrilikleri kolayca bulunur.

$$K = \det\,(g^{-1}\,h), \quad H = \frac{1}{2}\,iz\ (g^{-1}\,h). \tag{33}$$

4. INTEGRE EDİLEBİLİR DENKLEMLER

Literatüre bakıldığında integre edilebilirliğin tanımının tek olmadığını görürüz. Neredeyse herkesin kendi tanımı bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak eğer verilen bir KDD denklem aşağıdakilerden hehangi birinin sağlıyorsa *Integre Edilebilir* deriz. *Lax formulasyonu* kabul ediyorsa , *Painleve' özelliği* ğosteriyorsa, *Sıfır Eğrilik Formulasyonu* kabul ediyorsa, *Backlund Dönüşümleri* kabul ediyorsa, *Uzatma Yapı* kabul ediyorsa, *Sonsuz tane Korunan Nicelikleri* varsa , *Simetri Adım Operatörü* kabul ediyorsa gibi. Biz burada yalnız Lax formulasyonuna örnekler vereceğiz. Lax denklemlerinin , Lax operatorünün hangi cebir içinde değer aldığına bağlı olarak farklı formulasyonları bulunmaktadır. Örnek olarak, *pseudo diferansiyel oparatörler cebri*, *polinom cebri* ve *matris cebri* içinde değer alan Lax operatörleri gibi. Biz burada Lax formulasyonunu matrix cebri içinde kullanacağiz. Basit olması ve $\mathbf{R}^3$ deki yüzey teorisine uygunluğu açısında 2×2 matrisslerle ilgileneceğiz. Fazla sayıdaki kuple KDD için daha yüksek boyutlu matrisler kullanamak gerekir. Biz burda yalnız skalar (tek) KDD lerle uğraşacağımızdan 2×2 matrisler yeterli olacaktır.

Tanım 1 (*Lax Denklemleri*). $\Phi(u, v; \lambda)$, $SU(2)$ değerli bir fonksiyon olsun , öyleki $(u, v) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$ ve $\lambda \in \mathbf{C}$ özdeğer parametresi olarak bilinir. *Lax denklemleri*

$$\Phi_u = U\Phi, \quad \Phi_v = V\Phi, \tag{34}$$

şeklinde tanımlanır öyleki $U(u, v; \lambda)$ ve $V(u, v; \lambda)$, $su(2)$ değerli fonksiyonlar olup (34) deki denklemlerin tutarlılık şartı olan

$$U_v - V_u + UV - VU = 0 \tag{35}$$

denklemi sağlarlar. Burada U ve V *Lax çifti* diye adlandırılırlar.

Denklem (34) $su(2)$ değerli bir bağı tanımlar, denlem (35) de bu bağın eğriliğinin düz olduğunu söyler. Diferansiyel geometrik anlamda bu formulasyona aynı zamanda *sıfır eğrilik formulasyonu*da denir.

Örnek 1 (Sinüs-Gordon Denklemi). Eğer yukardaki Lax denklemlerinde Lax çifti U ve V yi

$$U = \frac{i}{2}\,(-\theta_u\,\sigma_1 + \lambda\sigma_3), \quad V = \frac{i}{2\lambda}\,(\sin\theta\,\sigma_2 - \cos\theta\sigma_3), \tag{36}$$

öyleki $\theta(u, v)$ sinüs-Gordon denklemini sağlar

$$\theta_{uv} = \sin\theta, \tag{37}$$

ve λ karmaşık spektral parametresidir. Sinüs-Gordon denklemi (37) tutarlılık yada eğrilik sıfır denklemi (35) nin bir sonucudur. Yani (36) deki Lax çifti ancak (37) denklemi sağlanıyorsa tutarlıdırlar. Sinüs-Gordon denkleminin Lax denklemleri kullanılarak bu denklemin *Backlund dönüşümleri*, *N-soliton çözümleri*, *Sonsuz korunum yasalarını*, *doğrusal olmayan toplanma* gibi özelliklerini bulmak mümkündür. Bunlar için **[abl1]** ve **[gür2]** kaynaklarına bakınız.

Örnek 2 (mKdV Denklemi). Korteweg de Vries denkleminin bir mertebe daha gelişmiş hali olan mKdV denklemi için Lax çifti şoyle verilir

$$U = \frac{i}{2}\,(\lambda\sigma_3 - \rho\sigma_1), \quad V = \frac{-i}{2}\,[(\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda\rho^2)\sigma_3 + v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2] \tag{38}$$

öyleki

$$v_1 = \rho_{uu} + \frac{1}{2}\rho^3 - \lambda^2\rho, \quad v_2 = -\lambda\rho_u. \tag{39}$$

Burada $\rho(u, v)$ mKdV denklemini sağlayan fonksiyondur

$$\rho_v = \rho_{uuu} + \frac{3}{2}\rho^2\rho_u. \tag{40}$$

Aynı şekilde , Lax çifti U ve V kullanılarak mKdV denkleminin hemen hemen en temel özelliklerinin ortaya çıkarmak mükündür.

5. EĞRİLERDEN DENKLEMLERE

SF denklemleri eğrinin her noktasında tanımlı olan SF üçlüsünün $E = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})^T$ eğri üzerindeki hareketini belirler. Eğer eğri aynı zamanda bir yüzey (S) üzerinde hareket ediyorsa, SF üçlüsünün bu hareket yönündeki değişimini yazabilmemiz gerekecektir. Bunun için bu yüzey $(s,t) \in \Omega \to S$ şeklinde parametrize edilsin, öyleki s eğrinin yay uzunluğu parametresi, t S de yüzeyin ikinci parametresi olsunlar. Eğrinin hareketi, SF denklemlerine ek olarak, t yönündeki değişimini belirleyecek olan, SF üçlüsünün t türevleri

$$\frac{dE}{dt} = \Gamma\, E \tag{41}$$

şeklinde verilir, öyleki Γ, izi sıfır olan 3×3 anti-simetrik bir matristir. Bu matris elemanları serbest değildirler. Hatırlarsak SF denklemleri

$$\frac{dE}{ds} = \Omega E \tag{42}$$

şeklinde idi, öyleki Ω , denklem (5) de verilmektedir. SF denklemleri ile t değişimini belirleyen (41) denklemlerinin tutarlı olması şartı bize

$$\Omega_t - \Gamma_s + \Omega\Gamma - \Gamma\Omega = 0 \tag{43}$$

denklemini verir. Bu denklem Γ nın elemenlarının eğrinin , eğriliği k ve burulması τ cinsinden bulunmasını sağlar. Aynı zamanda , özel seçimlere dayalı olarak , k ve τ arasında diferansiyel ilişki ortaya çıkacaktır. Daha açıklayıcı olması nedeniyle düzlem eğrilerini ele alalım. Burada Γ matrisini tahmin ederek değil t değişimini konum vektöründen başlatarak yapacağız. Konum vektörü α nın s ve t yönündeki değişimleri

$$\frac{d\alpha}{ds} = \mathbf{t}, \tag{44}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = p\mathbf{n} + w\mathbf{t} \tag{45}$$

şeklinde olsunlar. Burada k eğrinin eğriliği , p ve w , s ve t nin fonksiyonlarıdır. Yukardaki denklemlerin tutarlılık şartları bize aşağıdakileri verecektir

$$w_s = kp, \tag{46}$$
$$\mathbf{t}_t = (p_s + kw)\mathbf{n}. \tag{47}$$

Denklem (47) teğet vektörün t değişimini vermektedir. Bunun SF denklemi $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}$ ile tutarlılık şartlarına bakarsak

$$k_t = (p_s + wk)_s, \tag{48}$$
$$\mathbf{n}_t = -(p_s + kw)\mathbf{t},, \tag{49}$$

denklemlerini elde ederiz. Normal vektörün SF denklemlerinden s türevi $\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t}$ ile (49) deki t türevinin tütarlılık şartı olarak yeni bir şart elde etmeyiz. Böylece Γ matrisinin elemanlarıda bulunmuş olur. Buna ilaveten görüyoruzki k bir denklem sağlamak zorundadır. Eğer (46) denklemindeki w fonksiyonu eğrilik fonksiyonun t değişimini belirleyecek olan (48) denkleminde yerine konulursa

$$k_t = D^2\, p + k^2\, p + k_s \int^s kpds, \tag{50}$$

denklemi elde edilir, öyleki $D = \frac{\partial}{\partial s}$. Yukardaki denklem bize mKdV denkleminin simetri adım operatörünü $\mathcal{R}$ hatırlatıyor. Basit bir işlemle (50) istenen şekli alır.

$$k_t = \mathcal{R}\, p, \quad \mathcal{R} = D^2 + k^2 + k_s D^{-1}\, k. \tag{51}$$

Bu denklemdeki $\mathcal{R}$ operatörü mKdV denkleminin simetri adım operatörü ve D^{-1} , integral operatörüdür. Örneğin $p = k_s$ şeklinde alınırsa k nın sağladığı denklem mKdV denklemi olur

$$k_t = k_{sss} + \frac{3}{2}k^2 k_s \tag{52}$$

Fakat, $p(s,t)$ genel olarak serbest bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun $p = \mathcal{R}^n k_s$, n pozitif tam sayı, olarak aldıgımızda (51) mKdV hiyerarşisi ortaya çıkacaktır. mKdV denkleminin her çözümü (bilhassa soliton çözümleri)

düzlemde birbirinden farklı eğriler verecektir. Bildiğim kadarıyla problemin bu tarafıyla fazla uğraşılmamış. Yani mKdV ve hiyerarşisine karşı gelen düzlem eğrilerinin yerel ve genel özellikleri çalışılmamıştır. Sanırım bu eğrileri çizdirmek mümkündür. Bu tür bir bilgisayar çalışması başlangıç olabilir.

Burada belirtilmesi gereken bir nokta p fonksiyonun herhangi bir seçimi farklı eğrilere yol açacağı gibi k nın sağladıgı denklemin *integre edilebilir* olması gerekmez. Örneğin $p = e^k$ seçerek elde edilecek olan (51) denklemi integre edilebilir türden değildir.

Yukarda düzlem eğrileri için yapılan uyguluma benzer şekilde $\mathbf{R}^3$ de yapılabilir. Orada ayrıca burulma fonksiyonu τ içinde ayrı bir denklem ortaya çıkacaktır. Böylece doğrusal olmayan kuple denklemler elde edilir. Bu konuda daha detaylı bilgi edinmek isteyenler için [**gür1**] kaynağını tavsiye edebilirim. Bu çalışmada ayrıca Minkowski düzlemindeki eğrilerde incelenmiştir. Böylece $\mathbf{R}^3$ deki düzlem eğrilerinden elde edilemeyen bazı denklemlerde elde edilebilmiştir. Örnek olarak eğer sinyatürü $1 + 2\epsilon$ olan üç boyutlu genel bir uzayın ($\mathbf{R}^3$ için $\epsilon = 1$ ve M_3 için $\epsilon = -1$) yukardaki uygulama ile düzlem eğrilerinde mKdV denkleminin her iki isaretlisinide bulmak mümkündür, $k_t = k_{sss} + \frac{3}{2}\,\epsilon k\,k_s$.

Ayrıca doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin ortaya çıkarılışı için [**hos1**] e ve bu konunun ilkleri olmasından ötürü [**lam1**] e bakınız. Hosimoto doğrusal olmayan Schrodinger denkleminin soliton çözümleri ile doğada oluşan hortum olayı arasında bir ilişki kurmaya çalışır.

6. DENKLEMLERDEN YÜZEYLERE

Daha öncede belirttiğim gibi yüzey teorisi birçok araştırıcı tarafından soliton teorisinde kullanılmıştır. Buradaki asıl amaç yüzey teorisinden yeni integre edilebilir denklemler bulmaktır. Bu tür uğraşa örnek olarak ve ilgili kaynaklara ulaşmak amacıyla **[gür3]** kaynağına bakınız. Biz bu çalışmada , integre edilebilen denklemlerden yüzeylere ulaşmaya çalışacağız. Bunun için ilk önce Lax denklemerinden başlayacağız. Aşağıdaki önerme integre edilebilen bir denklem ve ilgili Lax denklemi ile bağlantıyı sağlayacak formülü vermektedir.

Önerme 2. *Φ, U ve V matrisleri (34) ve (35) denklemlerini sağlasın. A ve B gibi $su(2)$ değerli iki fonksiyon*

$$A_v - B_u + [A, V] + [U, B] = 0, \tag{53}$$

denklemini sağlasın. Öyleyse her A ve B çifti için $\mathbf{R}^3$ de bir yüzey ailesi vardır ve yüzeyin konum vektörünün türevleri

$$F_u = \Phi^{-1} A \, \Phi, , \quad F_v = \Phi^{-1} B \, \Phi \tag{54}$$

olarak verilir.

Burada *yüzey ailesi* diyorum, çünki genellikle A ,B çifti serbest sabitlere bağlı olarak bulunur. İsbatı için tutarlılık şartı olan $(F_u)_v = (F_v)_u$ denkleminin sağlanması gerekir. Bunu denklem (53) sağlamaktadır. Bu yüzeylerin geometrik niceliklerini daha önce vermiştik ama şimdi yeni tanımlar cinsinden yeniden verelim (birinci ve ikinci temel form matrisleri)

$$g = \begin{pmatrix} < A, A > & < A, B > \\ < A, B > & < B, B > \end{pmatrix}, \tag{55}$$

$$h = -\begin{pmatrix} < A_u + [A, U], C > & < A_v + [A, V], C > \\ < A_v + [A, V], C > & < B_v + [B, V], C > \end{pmatrix}, \tag{56}$$

olarak verilir, dolayısiyle yüzey eğrilikleri kolayca bulunur.

$$K = \det(g^{-1}\, h), \quad H = \frac{1}{2}\, iz\ (g^{-1}\, h). \tag{57}$$

Burada, normal vektöre tekabül eden matris , teğet uzayın elemanlarına benzer olarak [(54)], $Z = \Phi^{-1} C \Phi$ şeklinde alındı. Yani yüzeyin her noktasında tanımlı olarak verdiğimiz üçlü $\{X_u, X_v, N\}$ ye eş olarak onların matris temsilleri $\{A, B, C\}$ kullanılmaktadır, öyleki , (30) den dolayı C matrisi aşağıdaki sekildedir.

$$C = \frac{[A, B]}{|[A, B]|}. \tag{58}$$

Şimdi buradaki strateji şöyle ifade edilebilir. $SU(2)$ Lax formülasyonu olan olan bir diferansiyel denklem için A ve B matrislerini bulmak ondan sonra temel formları g, h ve sonrada yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplamak, mümkünse son olarak F nin kendisini bulmak. Tabiki bunların sonucunda yüzeyin özelliklerini araştırmak olacaktır. Genellikle bu tür stratejide yüzeyin konum vektörünü analitik olarak bulmak zordur. Yani yüzeyi çizdirmek için nümerik hesap yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Şimdi bir örnek verelim.

Örnek 3. Lax denklemi $U_{\bar{z}} - V_z + [U, V] = 0$ sağlayan Lax çifti U, V

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\theta_z & -Qe^{-\theta/2} \\ \frac{H}{2}e^{\theta/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{H}{2}e^{\theta/2} \\ \bar{Q}e^{-\theta/2} & \frac{1}{2}\theta_{\bar{z}} \end{pmatrix} \tag{59}$$

olarak verilsinler. Burada kompleks koordinatlar kullanılmaktadır, $z = \frac{u+iv}{2}$ ve bir harfın üzerindeki çizgi onun kompleks eşeleneği anlamındadır. Yukardaki Lax denklemleri açıldıgında θ, Q ve H fonksiyonlarının sağladığı kuple doğrusal olmayan bir denklem setine dönüşür.

$$u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2 e^{\theta} - 2Q\bar{Q}e^{-\theta} = 0, \tag{60}$$

$$Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2}H_z e^{\theta}, \quad Q_z = \frac{1}{2}H_{\bar{z}} e^{\theta} \tag{61}$$

Bu denklem seti bizim ilgilendiğimiz integre edilebilen denklemleri ve yukardaki U ve V ilgili Lax çifti olsun. Öyleyse aşağıdaki A ve B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ie^{\theta/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{\theta/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

Önerme 2 deki (53) şartını sağlar, dolayısıyle ilgili yüzeyin her noktasında tanımlı olan üçlü $\{F_z, F_{\bar{z}}, Z\}$

$$F_z = -ie^{\theta/2}\,\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Phi, \quad F_{\bar{z}} = -ie^{\theta/2}\,\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi, \tag{63}$$

$$N = -i\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Phi, \tag{64}$$

olur. Burada $\Phi_z = U\Phi$ ve $\Phi_{\bar{z}} = V\Phi$. Dolayısiyle yüzeyin temel formları

$$ds_I^2 = e^{\theta}\,dz\,d\bar{z}, \quad ds_{II}^2 = Qdz^2 + He^{\theta}dzd\bar{z} + \bar{Q}d\bar{z}^2 \tag{65}$$

olarak bulunur ve eğrilikleri K ve H aşağıdaki denklemleri sağlarlar

$$K = H^2 - 2Q\bar{Q}e^{-2\theta}, \quad \theta_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2e^{\theta} - 2Q\bar{Q}e^{-\theta} = 0. \tag{66}$$

Bu örnek için [**bob1**] e bakınız.

7. SOLİTON YÜZEYLERİ

Bir önceki bölümde denklemlerle yüzeyler arasındaki bağlantı formülündeki (54) A ve B matrislerini bulmak için (53) denklemini çözmek ve aynı zamanda konum vektörünü ifade etmek genellikle zordur. Bunu kolaylaştırmak için bir *değişim operatörü*, δ, tanımlayacağız. Burdaki değişim operatörü u ve v yönündeki kısmı türevlerle yer değiştirme özelliği gösterir. Bu tür operatörlere biraz sonra örnekler vereceğiz.

Tanım 3. δ türevlenebilir fonksiyonlar üzerine etki eden bir operatör olsun. Eğer δ aşağıdaki şartları sağlıyorsa ona *değişim operatörü* diyeceğiz

$$\delta\partial_u = \partial_u\delta, \quad \delta\partial_v = \partial_v\delta, \tag{67}$$

$$\delta(f\,g) = \delta(f)\,g + f\delta(g), \tag{68}$$

$$\delta(af + bg) = a\delta(f) + b\delta(g). \tag{69}$$

Burada f ve g türevlenebilir fonksiyonlar a ve b sabitleridir. Aşağıdaki önerme A ve B matrislerinin çözümüne bir çare getirmektedir

Önerme 3. *Φ, U, ve V Lax denklemlerini (34), (35) sağlayan matrisler, $A = \delta U$ ve $B = \delta V$ olsunlar. Öyleyse Önerme 2 deki (53) denklemi otomotik sağlanır ve*

$$(\Phi^{-1}\,\delta\Phi)_u = \Phi^{-1}\,A\,\Phi, \tag{70}$$

$$(\Phi^{-1}\,\delta\Phi)_v = \Phi^{-1}\,B\,\Phi \tag{71}$$

eşitlikleri bulunur.

Yukardaki önerme her değişim operatörü için bir yüzey ailesi vermektedir. Bu önermenin devamı olabilecek ve değişim operatörlerinin ilgili yüzeylerle doğrudan bağlayacak ve konum vektörlerininde ifadesini veren bir başka önerme verelim.

Önerme 4. *F yüzeyler kısmında bahsedilen $su(2)$ değerli konum vektörü olsun. Bu vekör ve türevleri*

$$F = \Phi^{-1}\,\delta\Phi, \tag{72}$$
$$F_u = \Phi^{-1}\,A\,\Phi, \tag{73}$$
$$F_v = \Phi^{-1}\,B\,\Phi,, \tag{74}$$

şeklinde verilir. Burada Φ*,* A *ve* B *önerme 2 ve 3 deki matrislerdir.*

İsbat için , yüzeyler kısmında belirtildiği üzere gösterilmesi gereken tutarlılık şartıdır, yani $(F_u)_v = (F_v)_u$ olması gerekir. Bu da Önerme 3 den dolayı zaten sağlanmaktadır. Bu önerme ile her denkleme karşı gelen bir yada birden fazla yüzey (δ operatörüne bağlı olarak) bulmak mümkün olacaktır.

Şimdi soliton teorisinde var olan değişim operatörlerini bulmak önem kazanmaktadır. Yukardaki önermenin kullanılabilirliği δ operatörünün varlığına dayanmaktadır. Aşağıdaki önerme bunun cevabını vermektedir. Burada soliton denklemlerinin değişiminden bahsettiğimiz zaman yalnız integre edilebilen denklemin değişiminden değil aynı zamanda Lax denklemlerinin değişimindende bahsedeceğiz.

Önerme 5. *Aşağidakiler soltion denklemlerinin değişim operatörleridir:*

a). *Doğrusal olmayan integre edilebilir denklem spektral parametre değişiminden etkilenmez. Bu durumda* δ *değişim operatörü ,* $\delta = \frac{\partial}{\partial\lambda}$ *şeklinde olur. Böylece yüzey konum vektörü ve türevleri*

$$F = \Phi^{-1}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}, \tag{75}$$
$$F_u = \Phi^{-1}\,\frac{\partial U}{\partial\lambda}\,\Phi, \tag{76}$$
$$F_v = \phi^{-1}\,\frac{\partial V}{\partial\lambda}\,\Phi, \tag{77}$$

yani $A = \frac{\partial U}{\partial\lambda}$ *ve* $B = \frac{\partial V}{\partial\lambda}$ *şeklindedir. Bu bağlantı formülleri ilk kez Sym tarafından verilmiştir,* [**sym1**].

b). *Bir başka değişim, Lax denklemlerinin* $SU(2)$ *ayar dönüşümleridir. Bu dönüsümler altında* Φ*,* U*, ve* V *değişir,*

$$\Phi' = S\,\Phi, \tag{78}$$
$$U' = S\,U\,S^{-1} + S_u\,S^{-1}, \tag{79}$$
$$V' = S\,V\,S^{-1} + S_v\,S^{-1} \tag{80}$$
$$\tag{81}$$

ama Lax denklemlerinin şekli değişmez. Burada S , $SU(2)$ değerli bir fonksiyondur. Yukardaki ayar dünüşumleri bize yeni bir δ operatörü tanımlayacaktır. Bu yukardaki ayar dönüşümlerinin sonsuz küçük şeklidir. Eğer $S = I + \varepsilon M$, öyleki $\varepsilon^2 = 0$ alınarsa , $\delta\Phi = M\Phi$ olur, dolayısıyle yüzeyin konum vektörü ve türevleri aşağıdaki şekilde bulunurlar.

$$F = \Phi^{-1}\,M\Phi, \tag{82}$$
$$A = \frac{\partial M}{\partial u} + [M, U], \tag{83}$$
$$B = \frac{\partial M}{\partial v} + [M, V] \tag{84}$$

c). *Doğrusal olmayan integre edilebilen denklemlerin kendi simetrileri. Bunlar iki türdür. İlki denklemin kendisini koruyan klasik Lie simetrileri diğeri ise çözümleri çözümlere götüren dönüşümlere ait olan genel simetrilerdir. Aslında tanım itibariyle genel simetriler klasik Lie simetrilerini içerirler. Her ikisi içinde* **[olv1]** *kaynağına bakınız. Bu simetrilere ait değişim operatörü Frechet türevi olarak alınır (bakınız* **[fok1]** *ve* **[cfg1]***). Yani , türevlenebilir bir F fonksiyonu için $\delta F(u) = lim_{\epsilon\to 0}\,\frac{dF(u+\epsilon v)}{d\epsilon}$ şeklinde verilir. Bu durumda yüzeyin konum vektörü ve türevleri*

$$F = \Phi^{-1}\delta\Phi, \tag{85}$$
$$A = \delta U, \tag{86}$$
$$B = \delta V \tag{87}$$

şeklinde verilirler.

Bu önerme , Lax formülasyonu olan denklemler ile ilgili yüzeyler arasındaki bağlantıyı kolayca sağlayacaktır. Bunu örneklerle göstereceğiz. Ama önce küre yüzeyi ile ilgili iki önerme verelim.

Önerme 6. *Denklemlerden bağımsız olarak, eğer Önerme 5 (b) deki M matrisinin determinantı sabit ise, yani* $\det M = R^2 =$ *sabit ise , ilgili yüzey yarıcapı R olan bir küre yüzeyidir.*

İsbat için (82) in iki tarafının determınantını almak yeterli olacaktır. Bazı denklemlerın ya u yönünde ya da v yönünde (ya da her ikisindede) öteleme simetrisi vardır. Böyle bir durmumda $\delta = \partial_u$ ya da $\delta = \partial_v$ alınabilir. Biz burada her yönde öteleme olabileceği düşüncesi ile $\delta = a\partial_u + b\partial_v$ olarak alacağız, öyleki a ve b serbest sabitlerdir.

Önerme 7. *Eğer $\delta = a\partial_u + b\partial_v$ simetri operatörü ise, öyleki a ve b serbest sabitlerdir ve* $\det(aU + bV) = R^2 =$ *sabit ise, ilgili yüzey yarıçapı R olan küre yüzeyidir.*

Eğer $\delta = a\partial_u + b\partial_v$ ise önerme 6 (c) deki (85) ve (34) den dolayı $F = \Phi^{-1}(aU + bV)\Phi$ olacak, buda bize $\det F = \det(aU + bV) = R^2$ eştliğini verecektir. Göröyoruzki küre yüzeyi özel bir denklemin ilgili yüzeyi olmaktan çok, özel ayar dönüşümü yada özel Lie simetrilerine ait olarak ortaya çıkmaktadır.

Aşağıda, sinüs-Gordon denklemi için iki farklı yüzey ailesi bulacağız. İlki spektral parametre değişmezliğinden , ikinciside genel simetrilerden ortaya çıkan yüzeylerdir.

Örnek 4. U ve V sinüs-Gordon denkleminin (37) Lax cifti (36) ve $\delta = \frac{\partial}{\partial\lambda}$ olsun. Öyleyse $A = \mu\frac{\partial U}{\partial\lambda} = \frac{i\mu}{2}\sigma_3$, $B = \mu\frac{\partial V}{\partial\lambda} = -\frac{i\mu}{2\lambda^2}(\sin\theta\,\sigma_2 - \cos\theta\,\sigma_3)$ olacaktır. Burada μ serbest bir sabittir. Dolayısiyle yüzeyin temel formları ve eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunurlar

$$ds_I^2 = \frac{\mu^2}{4}\left(du^2 + \frac{2}{\lambda^2}\cos\theta\,dudv + \frac{1}{\lambda^4}\,dv^2\right), \tag{88}$$

$$ds_{II}^2 = \pm\frac{\mu}{\lambda}\sin\theta\,dudv, \tag{89}$$

$$K = -\frac{4\lambda^2}{\mu^2}, \quad H = \pm\frac{4\lambda}{\mu}\cot\theta \tag{90}$$

Burda ortaya çıkan yüzeyler, Gauss eğriliği (negatif) sabit olan yüzeylerdir. Eğer θ sinüs-Gordon denkleminin her iki sonsuzda ($u \to \pm\infty$) kendisi ve türevleri sönen çözümleri (solitonlar) temsil ediyorsa aşağıdaki integral eşitliğini sağlar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g}\, K du = 0. \tag{91}$$

Örnek 5. Yine U ve V sinüs-Gordon denklemine ait Lax çifti ve $\delta\theta = \phi$ linear denklemin çözümleri olan genel simetriler olsun. Yani ϕ, $\phi_{uv} = \phi\cos\theta$ denklemini sağlasın. Öyleyse $A = -\frac{i}{2}\frac{\partial\phi}{\partial u}\,\sigma_1$, $B = \frac{i}{2\lambda}\phi\,(\cos\theta\,\sigma_2 + \sin\theta\,\sigma_3)$ bulunur. Dolayısiyle yüzeyin temel formları ve eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunurlar.

$$ds_I^2 = \frac{1}{4}\left({\phi_u}^2 du^2 + \frac{\phi^2}{\lambda^2}\,dv^2\right), \tag{92}$$

$$ds_{II}^2 = \frac{1}{2}\left(\lambda\phi_u\,\sin\theta\,du^2 + \frac{1}{\lambda}\phi\,\theta_v\,dv^2\right), \tag{93}$$

$$K = \frac{4\lambda^2\theta_v\sin\theta}{\phi\phi_u}, \quad H = \frac{2\lambda(\phi_u\,\theta_v + \phi\theta)}{\phi\phi_u}, \tag{94}$$

Sinüs-Gordon , $\theta_{uv} = \sin\theta$ denkleminin simetri denklemi olan $\phi_{uv} = \phi\cos\theta$ denklemini çözen sonsuz tane çözümü yani sonsuz tane genel simetrileri vardır. Örnek olarak

$$\phi = \theta_u,\ \theta_v,\ \theta_{uuu} + \frac{{\theta_u}^3}{2},\ \theta_{vvv} + \frac{{\theta_v}^3}{2}, \cdots \tag{95}$$

simetrileri alınabilir. Her simetri için bir yüzey ailesi olacağından, sinüs-Gordon denkleminden sonsuz tane yüzey ailesi türetmek mümkündür. Bu sonuç yalnız sinüs-Gordon denklemi için değil Lax formülasyonu kabul eden tüm denklemler için geçerlidir.

8. BAZI ÖZEL YÜZEYLER

Gauss, ve ortalama eğriklilerinin sağladığı özel şartlara bağlı olarak yüzeyler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilirler;

1) Minimal yüzeyler: $H = 0$;
2) Sabit ortalama eğrilikli yüzeyler: $H = sabit$;
3) Pozitif sabit Gauss eğrilikli yüzeyler: $K = sabit > 0$;
4) Negatif sabit Gauss eğrilikli yüzeyler: $K = sabit < 0$;
5) Weingarten yüzeyleri: Eğrilikleri K ve H arasında ilişki olan yüzeyler;
6) Bonnet yüzeyleri: Temel eğrilikleri değiştirmeyen ve basit olmayan izometri kabul eden yüzeyler;
7) Ortalama eğriliğin tersinin harmonik olduğu yüzeyler. Yani $\nabla^2 \frac{1}{H} = 0$ şartını sağlayan yüzeyler. Burada ∇^2 yüzey uzerinde tanımlı Laplace-Beltrami differansiyel operatörüdür;
8) Bianchi yüzeyleri: Gauss eğriliginin yüzey üzerindeki işaretine göre $\nabla^2 \frac{1}{\sqrt{K}} = 0$ ya da $\nabla^2 \frac{1}{\sqrt{-K}} = 0$ şartını sağlayan yüzeyler;
9) Willmore yüzeyleri: $\nabla^2 H + 2H(H^2 - K) = 0$ şartını sağlayan yüzeyler.

Gauss ve Ortalama eğriliklerin sabit olduğu yüzeyler klasik diferansiyel geometri kitaplarında detaylı olarak işlenen yüzeyledir. Burada bunlardan bahsetmeyeceğim. Soliton denklemlerinin asıl etkilemesi düşünülen yüzeyler yukardaki sıralamda Weingarten ve ondan sonraki yüzeylerdir. Biz burada örnek olarak yalnız ikisinden bahsedeceğiz

Örnek 6. (*Weingarten Yüzeyleri*) Yine sinüs-Gordon denklemine ait Lax çifti U ve V yi alalım ama bu kez değişim operatörünü spektral parametre değişmezliği ve sabit ayar dönüsümlerinin lineer toplamı alalım. Yani, $A = \delta U = \mu \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{ip}{2}[\sigma_1, U]$ ve $B = \delta V = \mu \frac{\partial V}{\partial \lambda} + \frac{ip}{2}[\sigma_1, V]$ olsun. Dolayısiyle $C = -i\sigma_1$ olcaktır. Burada yüzeyin temel formlarını ve eğriliklerini çok uzun olmalarından ötürü yazamayacağız ama K ile H çok basit bir ilişki sağlar. Eğer $p \neq 0$ ise

$$(\mu^2 + \lambda^2 p^2)K + 2p\lambda^2 H + 4\lambda^2 = 0, \tag{96}$$

Bu eşitlik bize elde edilen yüzeyin doğrusal bir Weingarten yüzeyi olduğunu

söylemektedir. Doğrusal Weingarten yüzeyleri Gauss eğriliği sabit olan yüzeylere paralel yüzeylerdir. Buradaki yüzey Gauss eğriliği negatif sabit olan bir yüzeye paraleldir ve uzaklığı $p/4$ dir. Eğer $p = 0$ ise elde edilen yüzey Weingarten yüzeyi değil ama Gauss eğriliği sabit negatif ($K = -\frac{4\lambda^2}{\mu^2}$) bir yüzeydir (Örnek 4 e bakınız). Burada bu yüzeylerin bütün doğrusal Weingarten yüzeylerini temsil (karakterize) etmeyeceği kesin, çünki Gauss eğriliği pozitif sabit olan yüzeylere paralel yüzeyler burada kapsanmıyor. Eğer hiperbolik sinus-Gordon denklemi ve ilgili Lax denklemi alınırsa her iki tür Weingarten yüzeyine ulaşmak mümkündür. Bunun için [**cfg1**] kaynağına bakınız. Ayrıca doğrusal olmayan Weingarten yüzeyleri içinde aynı kaynağa bakınız.

Örnek 7. (*Willmore Yüzeyleri*) Bu yüzeylerin temel özelliği Willmore fonksiyoelini , $W = \int\int \det \sqrt{g}\, H^2 dzd\bar{z}$, minimize (yada maksimize) etmeleridir. Eğer Örnek 3 deki H fonksiyon ayrıca

$$H_{z\bar{z}} + 4HQ\bar{Q}e^{-\theta} = 0, \tag{97}$$

denklemini sağlar ise bu yüzey Willmore yüzeyi olur. Elbette bu denklem ve Örnek 3 deki θ, Q, $\bar{Q}$ ve H denklemlerinin tutarlı çüzümleri olması gerekecektir. Şimdi $\mathbf{R}^3$ deki bir Willmore yüzeyinin temel formlarını ve eğriliklerini tekrar yazalım.

$$ds_I^2 = e^{\theta}\, dzd\bar{z}, \quad ds_{II}^2 = Qdz^2 + He^{\theta}dzd\bar{z} + \bar{Q}d\bar{z}^2, \tag{98}$$

$$K = H^2 - 2Q\bar{Q}e^{-2\theta}, \quad \theta_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2\, e^{\theta} - 2Q\bar{Q}e^{-\theta} = 0. \tag{99}$$

θ, Q ve H fonksiyonlarının sağladığı denklemleri sırasıyla verelim.

Gauss denklemi

$$\theta_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2e^{\theta} - 2Q\bar{Q}e^{-\theta} = 0, \tag{100}$$

Codazzi denklemleri

$$Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2}H_z e^{\theta}, \quad \bar{Q}_z = \frac{1}{2}H_{\bar{z}}e^{\theta} \tag{101}$$

Willmore denklemi

$$H_{z\bar{z}} + 4HQ\bar{Q}e^{-\theta} = 0 \tag{102}$$

Yukardaki üç kuple denklemin çözümleri $\mathbf{R}^3$ içindeki Willmore yüzeyleri verecektir. Bazı özel çözümler verelim: (a) Minimal yüzeyler $H = Q = 0$ ve θ harmonik bir fonksiyon. (b) Küre yüzeyi, $H = \lambda_0$, $K = {\lambda_0}^2$, öyleki λ_0 serbest bir sabittir. $Q = 0$ ve θ Liouville denklemini sağlar $\theta_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}{\lambda_0}^2 e^{\theta} = 0$. Liouville denklemi kesin olarak çözülebilir bir denklemdir. (c) Gauss eğriliği sıfır (developable) yüzeyler, $K = 0$, $\theta = sabit$, $Q = \bar{Q} = \frac{1}{2}He^{\theta}$ ve H, $H_{z\bar{z}} + H^3\, e^{\theta} = 0$ denklemini sağlar. Bu denklemi tek değişkenli bir diferansiyel denkleme indirgeyerek Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden çözümlerini bulmak mümkündür. (d) Kaynak [**wil2**] de, Willmore kendisi özel bir torus çözümünden bahseder. Bu çözümü burada açıkca vereceğiz.

Torus: Torus üzerindeki her nokta aşağıdaki konum vektörü ile tanımlanır [**man1**].

$$X(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u) \tag{103}$$

öyleki $0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi$ ve $a > r$. Diğer taraftan a ve r torusun büyük ve küçük yarıçapları olan sabitlerdir. Buradan temel formları

$$ds_I^2 = r^2du^2 + (a + r\cos u)^2dv^2, \tag{104}$$

$$ds_{II}^2 = rdu^2 + (a + r\cos u)\,\cos u\, dv^2, \tag{105}$$

şeklinde ve yüzeyin eğrilikleri için

$$K = \frac{\cos u}{r(a + r\cos u)}, \quad H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{\cos u}{(a + r\cos u)}\right) \tag{106}$$

ifadelerini buluruz. Buradaki ilk gözlemimiz torus yüzeyinin doğrusal bir Weingarten yüzeyi olmasıdır, i.e.,

$$2H - \frac{1}{r} - rK = 0. \tag{107}$$

İkinci gözlemimiz ise, Willmore fonksiyoneli $W = \int\int_S H^2 d\sigma = \pi^2 \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2-1}}$ şeklinde bulunur, öyleki $\mu = \frac{a}{r}$ ve W nın endüşük değeri $\mu^2 = 2$ olduğu zaman elde edilmesidir. Ayrıca bu sonuca uygun olarak yukardaki H ve K nın Wilmore denklemini

$$\nabla^2 H + 2H(H^2 - K) = 0 \tag{108}$$

$a = \sqrt{2}r$ şartı altında sağlamaktadır. Yani $a = \sqrt{2}r$ torusu bir Willmore yüzeyidir. Konformal koordinatlarda bu yüzey aşağıdaki gibi verilir (Örnek 3 ve 7 ye bakınız)

$$e^\theta = \frac{(a^2 - r^2)^2}{(a - r\cos w)^2}, \tag{109}$$

$$Q = \frac{a(a^2 - r^2)}{4r(a - r\cos w)}, \tag{110}$$

$$H = \frac{a\cos w}{2(a^2 - r^2)}, \tag{111}$$

$$K = \frac{-r + a\cos w}{r(a^2 - r^2)}, \tag{112}$$

öyleki $w = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ve $a = \sqrt{2}\, r$

Willmore yüzeyleri birçok disiplini ilgilendiren yüzeyler olmuş ve halada ilgi devam etmektedir. Bunun için [**wil1**] , [**wil2**], [**gür4**] , kırmızı kan hücreleri ile ilgili olarak, [**zho1**] ve yüksek enerji fizğinde [**pvi1**] kaynaklarına bakınız.

9. SONUÇ

Biz bu derlemede $SU(2)$ Lax formulasyonuna uyan soliton denklemleri ve onların simetrilerinden ortaya çıkabilecek $\mathbf{R}^3$ içindeki yüzeylerin genel inşasını ve bazı örnekler verdik. Burada yaptığımız bütün soliton denklemlerini içermez. Çünki, KdV denklemi gibi birçok soliton denklemi $SU(2)$ Lax formulasyonu içinde değildir. Bunlar için $SL(2,R)$ Lax formulasyonu almak gerekir. Buradan elde edilecek yüzeyler $\mathbf{R}^3$ içinde değil ama Minkowski uzayı M_3 içinde olacaktır. Ayrıca biz burada yalnız iki bağımsız değişkenli diferansiyel denklemleri inceledik. Daha yüksek boyutta benzer formulasyon kurulabilir. Burada önemli olan diferansiyel denklemin belirli bir grup değerli Lax formulasyonun varlığıdır. Bunun için [**dod1**] kaynağına bakınız.

Burada ortaya çıkan yüzeylerin yerel ve genel özellikleri üzerinde fazla durmadık. Aslında literatürdede fazla duran yoktur. En fazla üzerinde durduğumuz konu ortaya çıkan yüzeyin hangi sınıflandırmaya girdiği yada ortaya çıkan yüzey ailesinin bir sınıfı tamamen temsil edip edemeyeceğidir. Bildiğim kadarıyla bu yüzeylerin $\mathbf{R}^3$ içindeki durumlarını iyi anlayabilmek için nümerik çalışmalarda yapılmış değil. Örnek olarak sinüs-Gordon denkleminin genel simetrilerinden ortaya çıkan yüzeyelerin *ovaloid* olma iddiası bu yüzeyler çizdirilerek anlaşılabilir düşüncesindeyim.

KAYNAKLAR

A. Solitonlar Hakkında:

[**abl1**]. M J Ablowitz and H Segur , *Salitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, 1981.

[**abl2**]. M J Ablowitz and P A Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, Cambbridge, 1991.

[**dra1**] P G Drazin, *Solitons*, London Mathematical Society Lecture Note Series 85, Cambridge University Press, 1983.

[**gür2**] M. Gürses, *Inverse Scattering, Differential Geometry, Einstein-Maxwell* $2N$ *Solitons and Gravitational One Soliton Backlund Transformations* in **Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results**, Edited by C. Hoensalears and W. Ditez, Lecture Notes in Physics, No. 205, pp. 199-234, Springer, Berlin (1984).

B. Eğriler ve Yüzeyler:

[**eis1**]. L P Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces* , Dover, New York , 1909.

[**man1**]. M P Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.

[**spi1**]. M Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, (Vol. 2,3,4), Publish or perish Inc., 1979.

[**eis2**]. L P Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, (1949).

[**fla1**]. H Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Acad. Press., New York, 1963.

C. Eğriler ve Solitonlar:

[**lam1**]. G L Lamb, *Solitons on moving space curves*, *J. Math. Phys.*, **18**,

1654 (1977).

[**hos1**]. H A Hosimoto, *A soliton on a vortex filament*, *J. Fluid. Mech.*, **51**, 477 (1972).

[**gür1**]. M Gürses, *Moving curves on two dimensional surfaces and soliton equations*, *Phys. Lett. A*, **241A**, 373 (1998).

D. Yüzeyler ve Solitonlar:

[**gür3**]. M Gürses and Y Nutku, *New Nonlinear Evolution Equations From Surface Theory*, *J. Math. Phys.*, **22**, 1353 (1981).

[**fok1**]. A S Fokas and I M Gelfa'nd, *Surfaces on Lie Groups, on Lie Algebras and Their Integrability*, *Commun. Math. Phys.,*, **177**, 203 (1996).

[**sym1**]. A Sym, *Soliton Surfaces and Their Applications*. In **Geometrical Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems**. (Lecture Notes in Physics Vol. 239, pp 154-231) Sprinder, 1985.

[**bob1**]. A I Bobenko, *Surfaces in Trems of 2 by 2 Matrices. Old and New Integrable Cases* In **Harmonic Maps and Integrable Systems**, Eds. A P Fordy and J C Wood, Aspects of Mathemativs, Vieweg, (1994).

[**cfg1**]. Ö Ceyhan, A S Fokas and M Gürses, *Deformation of Surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations*, *J. Math. Phys.*, **41**, 2251 (2000).

[**fok2**]. A S Foaks, I M Gel'fand, F Finkel, and Q M Liu, **A Formula for Constructing Infinitely Many Surfaces on Lie Algebras and Integrable Equations**, *Selecta Mathematica: New Series*, to be published.

[**bor1**]. B G Konopelchenko and I A Taimanov, **Generalized Weierstrass Formulae, soliton equations and Willmore surfaces I. Tori of revolution and the mKdV equation**, (`arXiev: dg-ga/9506011`).

[**wil1**]. T J Willmore , *Total Curvature in Riemannian Geometry*, Ellis Harwood, 1982.

[**wil2**]. T J Willmore , **Surfaces in Conformal Geometry**, *Annals of Global Analysis and Geometry*, **18**, 255 (2000).

[**gür4**]. M Gürses, **Some Special Integrable Surfaces**, an invited talk in AMS-HKMS meeting, Dec. 13-16 2000, Honk Kong.

[**dod1**]. R K Dod, **Soliton Immersions**, *Commun. Math. Phys.*, **197**, 641-665 (1998).

[**zho1**]. A Y Zhong-Can and W Helfrich, **Instability of Deformation of Spherical Vesicle by Pressure**, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 2486 (1987).

[**pv1**]. R Parthasarathy and K S Viswaanathan, **Geometric Properties of QCD String From Willmore Functional** Preprint, 2000

E. Simetriler hakkında

[**olv1**]. P J Olver, *Aplications of Lie Groups To Differential Equations*, Springer, Berlin, 1991.

[**kra1**]. I S Krasil'shchik and P H M Kersten, *Symmetries and Recursion Operators for Classical and Supersymmetric Differential Equations*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2000.