

## ÜBER EINEN SPEZIALFALL DER PELL'SCHEN GLEICHUNG

S. GÜNTHER

Durch die Untersuchungen von M. Cantor und P. Tannery ist neuerdings die Aufmerksamkeit auf die unbestimmte Gleichung

$$2x^2 - 1 = y^2$$

gelenkt worden. Die Bestimmung der von den Griechen sogenannten "Diametralzahlen", welche bereits Platon bekannt gewesen zu sein scheinen, läßt sich auf diese Gleichung zurückführen. Nun wissen wir aber zwar so viel, daß man im Altertum eine Anzahl von Auflösungen dieser Gleichung kannte, allein darüber, wie man zu denselben gelangt sein könne, lassen sich höchstens Vermutungen anstellen. Heutzutage lösen wir bekanntlich die Pell'sche Gleichung

$$Ax^2 - 1 = y^2$$

am einfachsten durch die Entwicklung von  $\sqrt{A}$  in einen unendlichen Kettenbruch nach Lagranges Methode. Im vorliegenden Falle führt dieses Verfahren natürlich auf denselben Kettenbruch, welchen man erhält, indem man  $\sqrt{A} = \sqrt{P^2 + Q}$  setzt und nun die bereits den Arabern geläufig gewesene Entwicklung

$$\sqrt{P^2 + Q} = P + \frac{Q}{2P + \frac{Q}{2P + \dots}}$$

anwendet. Man bekommt nämlich auf dem einen wie auf dem andern Wege

$$\sqrt{1^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

und bildet man hievon die Näherungswerte

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \dots$$

so erkennt man sofort die Richtigkeit folgender wichtiger Behauptung:

*Je nachdem die unbestimmte Gleichung*

$$2x^2 \mp 1 = y^2$$

*vorgelegt ist, hat man  $x$  und  $y$  gleich dem Nenner und Zähler eines ungeraden oder eines geraden Näherungsbruches zu setzen.*

Insbesondere wußte man, wie aus Theons mathematischem Kommentare zu Platons Werken hervorgeht, daß

$$2 \cdot 1^2 - 1 = 1^2, 2 \cdot 5^2 - 1 = 7^2, 2 \cdot 29^2 - 1 = 41^2, 2 \cdot 109^2 - 1 = 239^2$$

sei. Daß die soeben kurz erörterte Methode damals nicht zur Anwendung gekommen sein könne, unterliegt insofern keinem Zweifel, als bei keinem alten Arithmetiker bisher eine Spur kettenbruchartiger Algorithmen nachgewiesen werden konnte. Um so

anziehender erscheint die Prüfung der Frage, ob nicht auch durch andere, einfachere Vorgehensweisen dasselbe Ergebnis sich gewinnen lasse. Wenn wir im Folgenden eine solche Methode vorschlagen, so legen wir darauf Gewicht, daß die rechnerischen Kunstgriffe, deren wir uns hierbei bedienen, in keiner Weise aus dem Kreise derjenigen heraustreten, welche auch in dem großen Werke des Diophant vorkommen und sonach überhaupt ein griechisches Gepräge an sich tragen. Es ergibt sich dabei zugleich Folgendes:

*Die Kenntnis des vollständigen Systemes von Auflösungen der Gleichung  $2x^2 - 1 = y^2$  ermöglicht sofort auch die Auflösung der Gleichung  $2x^2 + 1 = y^2$ , und umgekehrt.*

Zunächst werde der Beweis für den zweiterwähnten Fall geführt. Wir können die Gleichung

$$2x^2 + 1 = y^2$$

somit durch folgende beiden simultanen Gleichungen ersetzen:

$$2x = m(y + 1), \quad x = \frac{1}{m}(y - 1).$$

Drücken wir vermittelst dieser beiden Gleichungen  $x$  und  $y$  durch  $m$  aus, so folgt

$$x = \frac{2m}{2 - m^2}, \quad y = \frac{2 + m^2}{2 - m^2}.$$

Unter  $m$  ist hier jeder beliebige rationale Bruch  $\frac{p}{q}$  zu verstehen. Um womöglich die erhaltenen rationalen Lösungen in ganzzahlige überzuführen, setzen wir, da

$$x = \frac{2pq}{2q^2 - p^2}, \quad y = \frac{2q^2 + p^2}{2q^2 - p^2}$$

ist, den Nenner gleich  $z$  und erhalten so

$$x = \frac{2q\sqrt{2q^2 - z}}{z}, \quad y = \frac{4q^2}{z} - 1.$$

Damit nun  $x$  und  $y$  ganze Zahlen werden, wird als einfachste Bedingung  $z = 1$  angenommen werden müssen. Außerdem handelt es sich, wie behauptet war, nur noch darum, den Wurzel Ausdruck

$$\sqrt{2q^2 - 1}$$

zu rationalisieren.

Im andern Falle substituieren wir der Gleichung

$$2x^2 - 1 = y^2$$

das System

$$x + 1 = m(y + x), \quad x - 1 = \frac{1}{m}(y - x).$$

Ähnlich wie oben findet sich

$$x = \frac{m^2 + 1}{m^2 + 2m - 1}, \quad y = \frac{-m^2 + 2m + 1}{m^2 + 2m - 1}$$

oder, wenn  $m$  mit  $\frac{p}{q}$  vertauscht wird,

$$x = \frac{p^2 + q^2}{p^2 + 2pq - q^2}, \quad y = \frac{-p^2 + 2pq + q^2}{p^2 + 2pq - q^2}.$$

Wir setzen wiederum

$$p^2 + 2pq - q^2 = z,$$

betrachten nunmehr  $q$  als die bekannte,  $p$  als die unbekannte Größe und erhalten so

$$x = \frac{4q^2 + z \mp 2q\sqrt{2q^2 + z}}{z}, \quad y = \frac{-4q^2 - z \pm 4q\sqrt{2q^2 + z}}{z}.$$

Man sieht, daß, für  $z = 1$ , man wiederum nur der Lösungen  $2x^2 + 1 = y^2$  bedarf. Ist z.B.  $q = 2$ , so wird  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 29$ ,  $y_1 = -7$ ,  $y_2 = -41$ ; ist  $q = 12$ , so wird  $x_1 = 169$ ,  $x_2 = 985$ ,  $y_1 = 239$ ,  $y_2 = -1393$ .

Soweit ist nun also die Sache völlig klargestellt. Allein es möchte scheinen, als sei wenig dadurch gewonnen, indem ja nur die Auflösung einer Aufgabe auf diejenige einer anderen kaum minder schwierigen reduziert ist. Dem gegenüber ist jedoch daran zu erinnern, daß  $z$  durchaus nicht notwendig gleich 1 sein muß.

*Die Rationalisierung des Ausdruckes  $\sqrt{2q^2 + z}$  besitzt durchaus keine Schwierigkeit, sobald sowohl  $q$  als  $z$  willkürlich gewählt werden dürfen.*

So genügt zum Beispiel die Wahl  $q = 6$ ,  $z = 9$ , denn alsdann wird  $x = \frac{4 \cdot 36 + 9 \mp 12 \cdot 9}{9}$ ,  $y = \frac{-4 \cdot 36 - 9 \pm 24 \cdot 9}{9}$  gefunden; es ist also  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 29$ ,  $y_1 = 7$ ,  $y_2 = -41$ , wie oben. Allein  $z$  braucht gar keine ganze Zahl zu sein, es kann vielmehr z.B. ein Bruch von der Form  $\frac{1}{p^2}$  dafür gesetzt werden. Für  $q = 1$ ,  $z = \frac{1}{4}$  wird beispielsweise  $x = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5$  oder  $= 4 \cdot \frac{29}{4} = 29$  und  $y = 4 \cdot \frac{7}{4}$  oder  $= 4 \cdot \left(-\frac{41}{4}\right) = -41$ .

Man überzeugt sich so, daß bei einiger Geduld und bei einigem Geschick im Tatonnieren die Aufsuchung einer ganzen Reihe von Auflösungen ohne irgendwelche Schwierigkeiten erfolgt. Da nun aber von Cantor schlagend dargethan worden ist, daß gerade das "mathematische Experiment" mit Vorliebe von der pythagoreischen Schule gepflegt worden sei, an welche dann wieder die platonische unmittelbar anknüpfte, so wird der Hypothese, daß in dieser oder ähnlicher Weise durch Probieren die Gleichung  $2x^2 - 1 = y^2$  aufgelöst worden sein könne, einige Berechtigung zuerkannt werden müssen.

Indes ist es auch nicht schwer, selbst diesem geregelten Tatonnieren noch ein präziseres Verfahren zu substituieren. Und zwar gestattet die Idee, von welcher wir ausgingen, eine ziemlich umfassende Ausdehnung auf eine ganze Klasse von Spezialfällen der Pell'schen Gleichung. Einem Euler'schen (resp. Fermat'schen) Lehrsatz zufolge ist jede ganze Zahl entweder selbst ein Quadrat oder eine Summe von zwei, drei, vier Quadraten. Die beiden erstgenannten Möglichkeiten werden von jenem Auflösungsmodus der Gleichung  $Ax^2 - 1 = y^2$  umschlossen, welchen wir im Folgenden in Vorschlag bringen. Wir setzen  $A$  in der Form

$$a^2 + b^2$$

voraus, wo  $a$  und  $b$  irgendwelche ganze Zahlen vorstellen, die nur nicht beide gleichzeitig der Null gleich sein können, indem sonst  $y$  einen imaginären Wert erhielte.

An Stelle der Gleichung

$$(a^2 + b^2)x^2 - 1 = y^2$$

treten die beiden nachstehenden Gleichungen:

$$ax + 1 = m(y + bx), \quad ax - 1 = \frac{1}{m}(y - bx).$$

Aus denselben berechnet sich

$$x = \frac{m^2 + 1}{am^2 + 2bm - a}, \quad y = \frac{-bm^2 + 2am + b}{am^2 + 2bm - a}$$

oder, für  $m = \frac{p}{q}$ ,

$$x = \frac{p^2 + q^2}{ap^2 + 2bpq - aq^2}, \quad y = \frac{-bp^2 + 2apq + bq^2}{ap^2 + 2bpq - aq^2}.$$

Da  $a$  und  $b$  vertauschbar sind, so kann mit demselben Rechte

$$x = \frac{p^2 + q^2}{bp^2 + 2apq - bq^2}, \quad y = \frac{-ap^2 + 2bpq + aq^2}{bp^2 + 2apq - bq^2}$$

gesetzt werden. Halten wir uns an die erste Lösung, so muß

$$ap^2 + 2bpq - aq^2 = z$$

sein. Daraus findet man<sup>1</sup>

$$x = 1 + \frac{2(a^2 + b^2)q^2 \mp 2bq\sqrt{(a^2 + b^2)q^2 + a^2z}}{a^2z},$$

und für  $y$  noch einen etwas verwickelteren, wenn schon ähnlichen Ausdruck.

Um den in den für  $x$  und  $y$  gefundenen Werten gleichmäßig vorkommenden Wurzel Ausdruck in ganzen Zahlen zu lösen, greifen wir auf ein früher bereits vom Verf. dieses [Artikels] angegebenes Verfahren zurück. In einer Note in Liouvilles Journal [1] ward gezeigt, wie die drei Unbekannte enthaltende Gleichung

$$x^2 - \alpha y^2 = \beta z$$

in ganzen Zahlen aufgelöst werden kann. In unserem Falle ist

$$\alpha = a^2 + b^2, \quad \beta = a^2$$

zu nehmen. Jene Gleichung ist allerdings nicht unter allen Umständen auflösbar, man vermag aber mit Hilfe der erwähnten Methode sofort auch festzustellen, ob in gegebenem Falle eine Lösungsreihe existiert oder nicht. Demgemäß können wir jetzt Folgendes aussprechen:

*Soll die Gleichung*

$$(a^2 + b^2)x^2 - 1 = y^2$$

*ganzzahlig aufgelöst werden, so untersuche man zunächst, ob die unbestimmte Gleichung*

$$\xi^2 - (a^2 + b^2)\eta^2 = a^2\zeta$$

*ganzzahlige Lösungen zuläßt, und suche im günstigen Falle diese Lösungen auf. Hierauf prüfe man jeden einzelnen Wert von  $\zeta$  darauf, ob er, mit  $a^2$  multipliziert, in dem Ausdrucke*

$$2(a^2 + b^2)\eta^2 \mp 2b\zeta\eta$$

*ohne Rest enthalten sei; so oft dies angeht, hat man eine Auflösung der ursprünglichen Gleichung gefunden.*

#### LITERATUR

- [1] S. Günther, *Note sur la résolution de l'équation indéterminée  $x^2 - ay^2 = bz$  en nombres entiers*, J. Math. Pures Appl. (3) **2** (1876), 331–346

<sup>1</sup>In dieser Formel muss der Term  $a^2z$  durch  $az$  ersetzt werden. Dieser Fehler zieht sich durch den ganzen Rest des Artikels. Offenbar hat Günther diese Resultate nicht kontrolliert und auch keine Beispiele gerechnet. [FL]