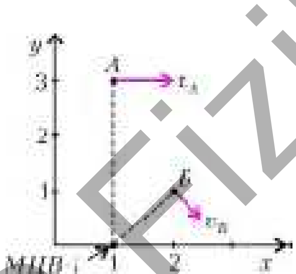
Deneme Sınavı 08.08.10 Çözümleri

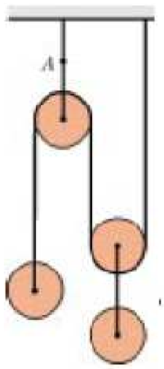
Soru 1. Yatay bir masa üstünde, *xy* koordinat sistemi yüzerinde çizilmiş, kareli bir defter yaprağı kayarak hareket etmektedir. Bilinen bir anda koordinatları (1;3) olan A noktasının hızın büyüklüğü 1m/s'dir ve x eksenin yönüdür, koordinatları (2;1) olan B noktasının hızının yönü ise aynı anda *x* eksen ile 45^0 bir açı yapıyor. Kâğıdın noktaların hızların büyüklüğü 1m/s'den büyük olmayan, kâğıdın hangi bölgesinde bulunmaktadır? (*Cevap: merkezi (1;0) noktada, yarıçapı ise r=3cm olan dairede*)

Çözüm: Yaprağı bir katı cisim olarak kabul edelim ve koordinat sistemin başlangıç noktasını (1;3) noktasında alalım, yani $O(x_1;y_1)=(1;3)-(1;3)=(0;0)$, buna göre ikinci noktanın koordinatları $(x_2;y_2)=(2;1)-(1;3)=(1;-2)$ oluyor (mesafenin birimi cm dir). Verilere göre yaprak döngüsel bir hareket yapmaktadır ve ani hızı sıfır olan noktanın konumu $M_0(x_0;y_0)$ verilen noktalardan geçen ve hızlara dik olan doğruların kesit noktasıdır, çünkü tanım olarak yaprağın her hangi bir M noktasının hızı $\mathbf{v}(M)=\mathbf{v}(M_0)+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{M_0M}$ eşittir, burada $\boldsymbol{\omega}$ dönme açısal hızdır (yaprağın düzlemine diktir). $(0;0)$ noktasından geçen ve $\mathbf{v}_1$ dik olan doğrunun denklemi $x=0$ dır; $\mathbf{v}_2$ dik ve $(x_2;y_2)$'ten geçen doğrunun denklemi ise $y-y_2=-\frac{1}{k}(x-x_2)$ denklemidir, burada $k=\pm\tan(45^0)=\pm1$ v_2'ye paralel olan doğrunun eğimidir. Verilere göre $k=-1$, yani $y-y_2=(x-x_2)$. Bu iki doğrunun kesit noktası için $x_0=0$ ve $y_0=-3$, yani $(x_0;y_0)=(0;-3)$. Buradan açısal hızının büyüklüğü için $\omega=\frac{v_1}{OM_0}$

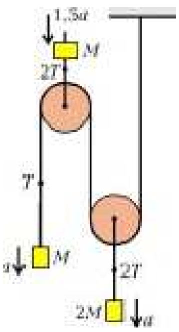


buluruz. Buradan ani hızı v'den küçük olan noktalar yarıçapı $R=\frac{v}{\omega}=OM_0\frac{v}{v_1}$ merkezi ise M_0'da olan bir daire oluşturuyor. Verilere göre $v_1=v=1cm/s$, yani $R=OM_0=3cm$, M_0 noktanın koordinatları ise ilk koordinat sisteme göre ise $M_0(x_0;y_0)=(0;-3)+(1;3)=(1;0)$,(şekildeki gibi)

Soru 2. Şekildeki verilen makara sisteminde tüm makaralar türdeştir ve makaranın kütlesi neredeyse ince olan ekseline düşer. İpi A noktasında ketsimizde makaraların ivmelerini bulunuz. İp mükemmeldir, ipin serbest kısımları (makara dışı) diktir. (*Cevap:* $\frac{6}{7}g$ *ve* $\frac{9}{7}g$)



Çözüm: Makaraların kütlelerini noktasal kütle gibi alıp şekli aşağıdaki gibi çizebiliriz. İpin gerilmesini T, yer çekim ivmesini $g = 1$ ve kütle $M = 1$ olarak alalım. Sağ kütlenin hareket denkleminden $2 - 2T = 2a$ ivme için $a = 1 - T$ buluruz. Aynı şekilde sol kütle için de aynı ivmeyi buluruz: $a = 1 - T$. Makaraların kinematik denklemlerinden M kütlenin ivmesi ipin sağ ucunun ivmesi artı sol ucunun ivmesinin yarısına eşittir, $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$. Sağ ucunun ivmesi ise 2M kütlenin ivmesinin iki katıdır, yani ikinci makara için $2T + 1 = (a + 2a)/2$ denklemini yazabiliriz. Buradan $T = \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}$, yani $T = \frac{3}{4}a - \frac{1}{2} = 1 - a$ veya sağ makaranın ivmesi $a = \frac{6}{7}$. Buradan sol makaranın ivmesi $\frac{3a}{2} = \frac{9}{7}$'ye eşittir (ivme birimi ise g dir).



Soru 3. Kütlesi *M*, eğim açısı α olan eğik bir düzlem pürüzsüz yatay bir masa üstünde bulunmaktadır. Kütlesi *m* olan küçük bir cisim v_0 hızı ile masa üstünde hareket etmektedir ve eğik düzleme çarpmadan (eğik düzlemin başlangıç noktasında masadan düzleme geçiş yuvarlak bir şekilde yapılmıştır) düzleme yukarıya doğru çıkmaya başlıyor. Küçük cisminin eğik düzlemin tepesine kadar çıkması için eğik düzlemin yüksekliği, *H*, ne kadar olmalıdır. Küçük cisim eğik düzlemden ayrıldıktan sonra eğik düzlem nasıl bir hız ile hareket edecektir?

(*Cevap:* $H = \frac{v_0^2}{2g}\frac{1}{1+\frac{m}{M}}$ *; cisim eğik düzlemi atlatmama durumda düzlemin hızı* $\frac{2v_0}{1+\frac{m}{M}}$)

Çözüm: m=1, g=1 ve v_0=1 mekaniğin birimleri olsun. Buna göre mesafe birimi $l_0 = \frac{v_0^2}{g}$ oluyor. Küçük cisim eğik düzlemin tepesini çıkıp tepeyi atlamazsa tepedeki konumda hızı tamamen düzlemin hızına eşittir. Momentum (yatay yönde) ve enerji koruma yasasına göre

$$(1+M)u = 1 \qquad (1)$$

$$(1+M)u^2 + 2H = 1 \qquad (2)$$

Burada u cismin ve eğik düzlemin o andaki hızıdır. (1)-(2) sistemden $H = \frac{M}{1+M}$'ye eşit olduğunu buluruz ve standart birimlerde $H = l_0\frac{\frac{M}{m}}{1+\frac{M}{m}} = \frac{v_0^2}{2g}\frac{1}{1+\frac{m}{M}}$. Küçük cisim eğik düzlemden ayrıldıktan sonra yine momentum ve enerji koruma yasalarına göre

$$v + Mu = 1 \qquad (3)$$

$$v^2 + Mu^2 = 1 \qquad (4)$$

Burada v cismin, u ise o andaki eğik düzlemin hızıdır. (3)-(4) sisteme göre $u = \frac{2}{1+M}$ veya standart birim biçiminde $u = \frac{2v_0}{1+\frac{m}{M}}$.

Eğer küçük cisim tepeye varamazsa veya tepeye varıp tepeyi atlatırsa cismin tepedeki konumunda hızının dikey bileşeni sıfır değildir:

$$\begin{cases} v_x = u + v\cos\alpha \\ v_y = v\sin\alpha \end{cases}, \qquad (5)$$

burada v cismin eğik düzleme göre hızıdır. Momentum ve enerji koruma yasasına göre

$$\begin{cases} v_x + Mu = 1 \\ v_x^2 + v_y^2 + Mu^2 + 2H = 1 \end{cases}, \text{ yani}$$

$$\begin{cases} u + v\cos\alpha + Mu = 1 \\ v^2 + 2uv\cos\alpha + Mu^2 + 2H = 1 \end{cases} \qquad (6)$$

Sistem (6)'yı u'ya göre çözdüğümüzde eğik düzlemin hızını cisim düzlemi atlattığı anda buluruz.

Soru 4. Pistonlu bir silindir içinde 1 mol helyum bulunmaktadır. Gaz yavaş bir şekilde ısıtılıyorken gazın hacmi artıyor fakat silindirin hareketsiz duvarına birim zamanda molekül çarpması değişmiyor. Böyle bir süreçte gazın ısı kapasitesini bulunuz. (*Cevap: C=2R*)

Çözüm: Tanım olarak birim zamanda bir duvara çarpan molekül sayısı $\frac{dN}{dt} = \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$, burada $\mathbf{j}$ molekül akı yoğunluğu, dS ise duvardaki çarpılan küçük alanın vektörüdür. Bir yavaş süreçte ideal gaz için $\frac{dN}{dt} = \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4}nvdS = \frac{1}{4}n\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}dS$, burada $n = \frac{N}{V}$ birim hacimdeki molekül sayısı, $v = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ ise moleküllerin ortalama hızıdır. Verilere göre $N=N_A$ (1mol gazda Avogadro N_A sayısı kadar molekül bulunmaktadır) ve $\frac{dN}{dt} = \frac{1}{4}\frac{N_A}{V}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}dS = sabit$, yani

$$T = aV^2 \qquad (1)$$

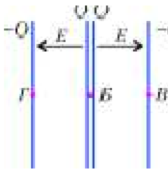
burada a bir sabittir. Bir süreçte ısı kapasitesi tanım olarak $C = \frac{\delta Q}{dT}$ dir ve termodinamiğin birinci yasasına göre bir ideal gaz için gaza verilen ısı

$$\delta Q = C_V dT + \delta W \text{ 'ye} \qquad (2)$$

eşittir, burada C_V sabit hacim ısı kapasitesi, δW ise gazın yaptığı iştir. Süreç yavaş olduğuna göre her bir anda ideal gazın durum denklemi geçerlidir, buradan $\delta W = pdV = p\frac{dV}{dT}dT$ 'ye eşittir. Denk(1) göre $\frac{dV}{dT} = \frac{1}{2aV} = \frac{V}{2T}$, yani $\delta W = p\frac{V}{2T}dT = \frac{R}{2}dT$. Bu ifadeyi denk(2)'ye yerleştirdiğimizde $\delta Q = C_V dT + \frac{R}{2}dT = \left(C_V + \frac{R}{2}\right)dT = 2RdT$ buluruz. Burada bir atomlu 1 mol gazın ısı kapasitesi $C_V = \frac{3R}{2}$'ye eşit olduğu varsayılmıştır. Sonuçta sürecin ısı kapasitesini $C = \frac{\delta Q}{dT} = 2R$ olarak buluruz.

Soru 5. Çapları *D* olan üç tane dairesel metal saçları, aralarındaki mesafe *d* (*d*<<*D*) olarak birbirine paralel durumdadır (üçünün de ekseni aynı doğrudur). Ortadaki saçın yüzeyinde homojen dağılımlı 2*Q* miktarda bir yük bulunmaktadır, kenardaki saçlar ise yine homojen şeklinde yüklüdür ama her birinde bulunan yük –*Q*'dur. Dairelerin merkezlerinde elektrik alanın potansiyelini bulunuz. Etrafta başka cisim bulunmamaktadır. (*Cevap: ortadaki dairenin potansiyeli* $\frac{4Qd}{\varepsilon_0 \pi D^2}$*, kenarlardakilerin ise sıfırdır*)

Çözüm 1: Daireler sınırlı olduğuna göre potansiyelin referans noktasını sonsuzda sıfır almak uygundur. Aynı anda ortadaki daireyi yükü +Q olan iki tane bir biriyle yapıştırılmış özdeş dairelerden olduğunu kabul edebiliriz (şekildeki gibi). Daireler arasındaki mesafe d verilere göre dairelerin çapından çok daha küçüktür (d<<D), dolayısıyla daireler arasındaki bölgede ve dairelerin dışında fakat dairelere çok yakın bölgelerde sistemin elektrik alanı iki paralel plakalı kondansatör sistemin elektrik alanına özdeştir (bu modelin esası dairelerin ekseninde ise çok yüksektir). Yani elektrik alanı (E) daireler arasında sabit olarak homojendir (şekildeki gibi). Gauss yasasına göre $2ES = \frac{2Q}{\varepsilon_0}$ veya:



$$E = \frac{4Q}{\pi \varepsilon_0 D^2} \qquad (1)$$

Plakaların dışında ise $E \approx 0$. Buradan

$$\varphi_\Gamma = \varphi_B = 0 \qquad (2)$$

$$\varphi_{\mathrm{B}} = \varphi_\Gamma + Ed = \frac{4Qd}{\pi \varepsilon_0 D^2} \qquad (3)$$

Çözüm 2: Yarıçapı r, yüzey yükü $\sigma = \frac{4Q}{\pi D^2}$ olan homojen yüklü bir dairenin merkezinden z uzaklıkta ve dairenin ekseninde bulunan bir noktada elektrik alanın potansiyeli $\varphi = k\sigma \int_0^r \frac{d(\pi \rho^2)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$'ye eşittir, yani

$$\varphi = 2\pi k \sigma \left(\sqrt{r^2 + z^2} - z \right), \qquad (1)$$

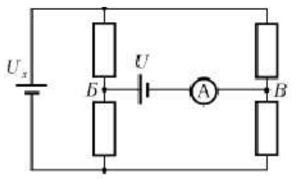
burada $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ sabittir. Böyle hesaplanan potansiyelin referans noktası (φ=0) sonsuzdadır. Denk(1)'ye göre

$$\begin{aligned} \varphi_\Gamma = \varphi_{\mathrm{B}} &= 2\pi k \sigma \left(-r + 2\left(\sqrt{r^2 + d^2} - d \right) - \left(\sqrt{r^2 + 4d^2} - 2d \right) \right) \\ &\approx 2\pi k \sigma \left(-r + 2\left(r - \frac{d}{2} \right) - (r - d) \right) = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

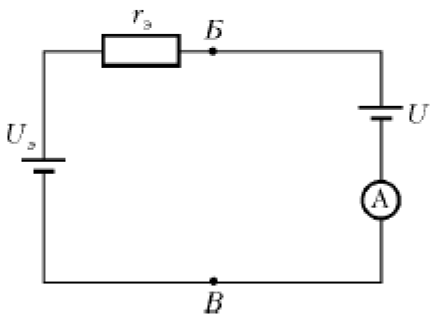
ve

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{B}} &= 2\pi k \sigma \left(-\left(\sqrt{r^2 + d^2} - d \right) + 2r - \left(\sqrt{r^2 + d^2} - d \right) \right) \\ &\approx 4\pi k \sigma \left(-(r - d) + r \right) = 4\pi k \sigma d = \frac{4Qd}{\pi \varepsilon_0 D^2} \end{aligned} \qquad (3)$$

Soru 6 Dört dirençten oluşan bir köprü gerilimi bilinmeyen bir pile bağlanmaktadır. Köprünün köşegeninde gerilimi 12V olan başka bir pil ve 5mA gösteren bir ampermetre seri olarak bağlıdır (şekildeki gibi). Köşegendeki pilin kutuplarının yerleri değişince ampermetreden geçen akımın yönü değişiyor ve değeri 35mA oluyor. İki pilin yerlerini değiştirilende ampermetreden geçen akım sıfır oluyor. Eğer pillerden birinin kutuplarının yerlerini değiştirirsek ampermetre ne gösterecektir? *(Cevap: 34.6mA*)



Çözüm: Devredeki Б ve B noktalar arasında aynı akımı gerilimi U_e iç direnci ise Re olan bir etkin emk kaynağınla da sağlayabiliriz (şekildeki gibi). Gerçekten, orijinal devrede U_x kaynaktan geçen akım I_x olsun, etkin devrede ise akım I olsun. Bu iki devre özdeş olduğuna göre iki devrede de birim zamanda yapılan iş birbirine eşit olmak zorundadır: $U_x I_x + UI = U_e I + UI$, yani



$$U_e = U_x \frac{I_x}{I} = kU_x, \tag{1}$$

burada I_x gerilimi U_x, I ise gerilimi U olan pilden geçen akımdır, $k = \frac{I_x}{I}$ ise köprüdeki dirençlere balı olan bir kat sayısıdır. Verilere göre $\frac{|U - U_e|}{r_e} = I_1$, $\frac{|U + U_e|}{r_e} = I_2$ ve $I_2 > I_1$, yani $U > U_e$, burada I_1 ampermetrenin ilk anda ölçtüğü akım, I_2 ise gerilimi U olan pilin kutupların yerlerini değiştirdikten sonra ölçülen akımdır. Bu verilere göre

$$U_e = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} U = \alpha U = kU_x \tag{2}$$

U_x ve U pillerin yerlerini değiştirdiğimizde akım sıfır oluyor, yani

$$kU = U_x, \tag{3}$$

burada kU yeni etkin gerilimdir. Denk(2) ve (3)'ten $\alpha kU = k^2 U_x = \alpha U_x$, yani

$$k = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1}} \text{'ye eşittir.} \tag{4}$$

Bu durumda pillerden birinin kutupların yerini değiştirirsek ampermetrenin ölçtüğü akım

$$I = \frac{2kU}{r_e}$$

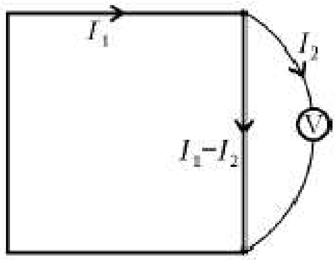
$$= \frac{2kU}{U + U_e} \frac{U + U_e}{r_e}$$

$$= \frac{2kU}{U + U_e} I_2 = \frac{2k}{1+\alpha} I_2$$

Verilere göre $\alpha = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} = \frac{3}{4}$, $k = \sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $I = \frac{2k}{1+\alpha} I_2 = \frac{4\sqrt{3}}{7} 35mA = 34.64mA$.

Soru 7. Direnci r=100Ω olan ince bir telden kare şeklinde bir çerçeve yapılıyor ve çerçeve bir uzun bobine geçiriliyor. Bobinden zamanla lineer şeklinde artan bir akım akıyor. Bu durumda çerçevedeki indüklenmiş akımın değeri *I*=5mA'dir. Eğer karenin bir kenarın yerine bir voltmetre bağlanırsa voltmetrenin okuduğu gerilim ne kadar olacaktır? Eğer karenin kenarını kaldırmasak ve sadece kısa tellerle voltmetrenin uçlarını bas etimiz kenarın uçlarına balarsak voltmetre bu durumda ne gösterecek? Voltmetrenin direnci R=1kΩ'dur. (*Cevap: birinci durumda U=0.465V, ikinci durumda U=0.1227V*)

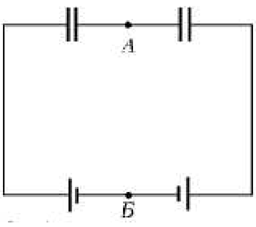
Çözüm: Faraday yasasına göre her hangi kapalı bir döngüde indüklenmiş emk $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt}$'ye eşittir. Bizim örnekte bu bir sabittir: $\Phi = \mu_0 n \pi r^2 I$ ve bobinin akımı zamanla lineer şeklinde değişiyor, yani $\dfrac{d\Phi}{dt} = \mu_0 n \pi r^2 \dfrac{dI}{dt} = sabit$. Telden oluşan döngüde verilere göre $\varepsilon = I_i r = 5(mA) \cdot 100\,\Omega = 0.5V$, burada I_i döngüde indüklenmiş akımdır. Karenin bir kenarını voltmetreyle değiştiğinde devrede $I = \dfrac{\varepsilon}{\frac{3}{4}r + R} = \dfrac{I_i}{\frac{3}{4} + \frac{R}{r}} = \dfrac{4}{43} I_i$ akım



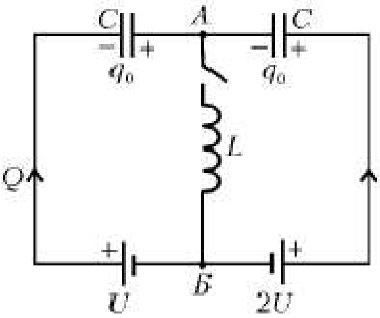
oluşacak ve voltmetrenin okuduğu gerilim $U = I_i R = \dfrac{20}{43} V = 0.465V$ eşittir. İkinci durumda voltmetre karenin bir kenarına paralel bağlıdır: okuduğu gerilim

$$U = I \frac{R\frac{r}{4}}{\frac{1}{4}r + R} = \frac{\varepsilon}{\frac{3}{4}r + \frac{Rr/4}{R + r/4}} \frac{R\frac{r}{4}}{\frac{1}{4}r + R} \approx 0123V$$

Soru 8. Her birinin kapasitansı *C* olan iki tane kondansatör seri olarak bağlanıyor (şekildeki gibi) ve oluşan devrenin uçları gerilimleri *U* (şekildeki sol) ve 2*U* (şekildeki sağ) olan pillerin uçlarına şekildeki gibi bağlanıyor. Kısa bir süre sonra devrenin A ve Б noktaları arasına indüktansı *L* olan bir bobin bağlanıyor. Bobinden geçen akımının aldığı maksimum değerini ve kondansatörlere yüklenen yüklerin maksimum değerlerini bulunuz. Tellerin dirençlerini küçük (fakat sıfır değil!) kabul ediniz. Pilleri, bobini ve kondansatörleri ideal olarak kabul ediniz. *(Cevap:* $I_m = 3U\sqrt{\dfrac{C}{2L}}$*, yüklerin maksimum değerleri ise 2.5CU ve 3.5CU'dur)*



Çözüm: Bobin devreye bağlandığında kondansatörlere ek yük gelecek: sol kondansatördeki yük



$$q_1 = (Q_{10} + Q_1) = C\big(\varphi_A - (\varphi_B + U)\big), \qquad (1)$$

sağdakinde ise

$$q_2 = (Q_{20} + Q_2) = C\big((\varphi_B + 2U) - \varphi_A\big) \text{ olacaktır,} \qquad (2)$$

burada Q_{10} ve Q_{20} kondansatörlerin bobin devreye bağlanmadan önceki yükleridir:

$$Q_{10} = C\big(\varphi_{0A} - (\varphi_{0B} + U)\big) \qquad (3)$$

$$Q_{20} = C\big((\varphi_{0B} + 2U) - \varphi_{0A}\big) \qquad (4)$$

Yük koruma yasasına göre A noktasında (bobin bağlanmamış durumda) toplam yük sıfır olmalıdır, yani $Q_{10} = Q_{20}$. Buradan ve denk(3-4)'ten

$$Q_{10} = Q_{20} = \frac{1}{2}CU \qquad (5)$$

Denk(1)-(2)'den $q_1 + q_2 = (Q_{10} + Q_{20}) + (Q_1 + Q_2) = CU$. Fakat denk(3)-(4)'de göre $(Q_{10} + Q_{20}) = CU$. Buna göre $(Q_1 + Q_2) = 0$ veya

$$Q_1 = -Q_2 . \qquad (6)$$

Yeni duruma sistem çok hızlı şeklinde geldiğine göre tellerdeki ısıyı ihmal edebiliriz ve emk'ların yaptığı iş sistemin enerjinin değişimine eşittir:

$$-UQ_1 + 2UQ_2 = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{(Q_{10}+Q_1)^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{(Q_{20}+Q_2)^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{{Q_{10}}^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{{Q_{20}}^2}{C}$$, yani denk(6)'dan

$$3UQ_2 = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{(Q_{20}-Q_2)^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{(Q_{20}+Q_2)^2}{C} - \frac{{Q_{20}}^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{{Q_2}^2}{C}$$, buradan

$$\frac{1}{2}LI^2 = 3UQ_2 - \frac{{Q_2}^2}{C} . \qquad (7)$$

Buna göre akım I Q_2'in bir fonksiyonudur ve bu fonksiyon maksimum değeri $\dfrac{Q_2}{C} = \dfrac{3}{2}U$ olduğunda alıyor, yani $\dfrac{1}{2}LI_{\max}^2 = \dfrac{3}{2}UQ_2$, buradan $I_{\max} = 3U\sqrt{\dfrac{C}{2L}}$.

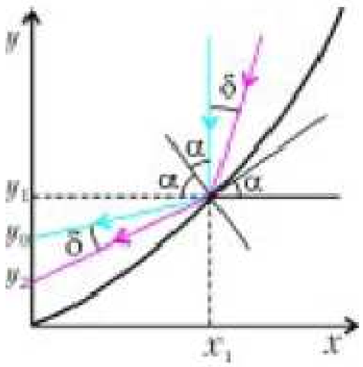
Bobindeki akım sıfır olduğunda kondansatörlerin yükü maksim oluyor, yani $\frac{Q_2}{C} = 3U$ olduğunda. Buradan, $q_1 = (Q_{10} + Q_1) = \frac{CU}{2} - 3CU = -2.5CU$ ve $q_2 = (Q_{20} + Q_2) = \frac{CU}{2} + 3CU = 3.5CU$. Bobindeki akım kondansatörler en boş olduğunda sıfır oluyor: bu durumda $Q_2 = 0$ ve $q_1 = Q_{10} = \frac{CU}{2}$, $q_2 = Q_{20} = \frac{CU}{2}$.

Soru 9. Çapı D=6m olan büyük parabolik bir yansıtıcının odak noktasında frekansı f=1000MHz olan noktasal bir radyo dalgası kaynağı bulunmaktadır. Difraksiyon sebebiyle kaynaktan çıkan elektromanyetik demeti az bir şey açılıyor. Demetin açısın 3 kere artması için kaynağın yerini paraboloidin ekseni boyunca ne kadar değiştirmesi gerekiyor? (*Cevap:* $\approx 0.23F$ *, F-odak uzaklığı*)

Çözüm: Parabolik bir yansıtıcının odak noktasında bulunan noktasal bir ışık kaynağından çıkan ve dalga boyu λ olan bir ışık demeti, kaynak odak noktasında olmasına rağmen, kırınıyor (yanı demet yansıtıcının eksenine tam paralel değildir, az bir şey açılıyor). Demetin difraksiyon açısı

$$\delta_0 = \frac{\lambda}{D} \qquad (1)$$

mertebesindedir, burada D yansıtıcının çapıdır. Kaynağı yeri odak noktasından yansıtıcının ekseni boyunca değiştirdiğinde difraksiyon açı artıyor. Soruda bu açı $\delta = \dfrac{3\lambda}{D}$ kadar olması için yer değişimi ne kadar olmalıdır soruluyor. Yansıtıcıdan çıkan ışığın ve aynanın aynı noktasına ters yönde düşen ışığın yolları aynı olduğu için bu soruyu daha kolay şu şekilde sorabiliriz: Parabolik aynanın ekseninle δ açı yapan ve aynaya düşen ışık odak noktasından en fazla ne kadar sapabilir? Tabii ki, ışık aynanın eksenine paralel ise, fark etmez, ışık aynanın hangi noktasına düşse de ışık aynadan yasıldıktan sonra hep aynanın odak noktasından geçiyor(parabolik aynanın özelliği).



Gerçekten, şekilde eksene paralel olan ve aynanın (x_1,y_1) noktasına aynaya α açısıyla düşen ışın yansımadan sonra düşey eksenin y_0 noktasından geçiyor. Bu noktayı bulmak için yansıma doğrunun denklemini yazalım:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (2)$$

Burada *k* doğrunun eğimidir. Parabolik aynanın denklemi

$$y = Ax^2 \qquad (3)$$

olduğuna göre yananın (x_1,y_1) noktasındaki teğetin eğimi

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = 2Ax_1 \text{ 'ye eşittir.} \qquad (4)$$

Buradan denk(1)'ki eğim için ise

$$k = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\cot(2\alpha),$$

yani

$$y_0 = y_1 + \cot(2\alpha)x_1. \qquad (5)$$

Buradan

$$y_0 = Ax_1^2 + x_1\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = Ax_1^2 + x_1\frac{1-(2Ax_1)^2}{4Ax_1} = \frac{1}{4A} = F \qquad (6)$$

Yani ışın hangi noktaya düşse de hep odak noktasından geçiyor, burada

$$F = \frac{1}{4A} \qquad (7)$$

parabolik aynanın odak uzaklığıdır. Fakat ışın düşey ile δ açısı yaptığında ve aynanın farklı noktalarına düştüğünde aynanın eksenin farklı noktalarından geçiyor. Şekle göre δ-ışının yansıladıktan sonra x-eksenle yaptı açı $\pi-(\frac{\pi}{2}-2\alpha+\delta)=\frac{\pi}{2}+2\alpha-\delta$ olduğuna göre doğrusunun denklemi $y-y_1=\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha-\delta\right)(x-x_1)$ 'ye eşittir veya

$$y=y_1-\cot(2\alpha-\delta)(x-x_1) \tag{8}$$

Açı $\delta<<1$ olduğuna göre $\cot(2\alpha-\delta)\approx\cot 2\alpha-\frac{1}{\sin^2 2\alpha}(-\delta)=\cot 2\alpha+\frac{1}{\sin^2 2\alpha}\delta$ ve denk(8) şu şekilde yazılır: $y=y_1-\cot(2\alpha)(x-x_1)-\frac{1}{\sin^2 2\alpha}\delta(x-x_1)$. $x=0$ iken

$$y_2=y_1+\cot(2\alpha)x_1+\frac{1}{\sin^2 2\alpha}\delta x_1 \tag{9}$$

Denk(5) göre ışın odak noktasına göre yer değişimi

$$y_2-y_0=\frac{\delta x_1}{\sin^2 2\alpha} \text{ 'ye eşittir} \tag{10}$$

Fakat bu yer değişimi ışın aynanın düştüğü noktaya bağılıdır. Denk(4)'de göre $x_1=\frac{\tan\alpha}{2A}$, buradan sapma $\Delta=y_2-y_0=\frac{\delta x_1}{\sin^2 2\alpha}$ α açının fonksiyonu olarak buluruz veya kaynaktan çıkan ışının eksenden sapma açısını kaynağın konumunun (Δ) fonksiyonu olarak buluruz:

$$\delta=8A\Delta\sin\alpha\cos^3\alpha \tag{11}$$

Bu sapmanın maksimum değeri $f(\alpha)=\sin\alpha\cos^3\alpha$ fonksiyon maksimum olduğundadır, yani $\frac{df}{d\alpha}=\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\right)=0$ olduğunda, buradan $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$f(\alpha)_{\max}=\tan\alpha\cos^4\alpha=\tan\alpha\frac{1}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$ ve

$$\delta=\frac{3\sqrt{3}}{8F}\Delta \tag{12}$$

Verilere göre $\delta=\frac{3\lambda}{D}$, buradan

$$\Delta=\frac{8\lambda F}{\sqrt{3}D} \tag{13}$$

Verilere $\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot10^8}{10^9}m=0.3m$, D=6m, buradan $\Delta\approx0.23F$ (Cevap)

Soru 10. Hafif kütleli ve ince duvarlı bir kapta elektrik bir ısıtıcıyla 1L su ısıtılıyor. Bilinen bir süre içinde suyun sıcaklı 60^0C olup ısıtmaya rağmen fazla artmıyor. Bu olayın farkına vardığımızda ısıtıcıyı kapatıyoruz. İlk 20 saniyede suyun sıcaklığı 2^0C düşüyor. Isıtıcının kabında '500W ve Türk malı' yazıldığına göre bir 'Türk birim Watt' kaç Watt'tır?

Çözüm: Denge durumunda (suyun sıcaklığı t=60^0C iken) ısıtıcının tüm gücü kaptan ortama yayılıyor. Furye yasasına göre $W = \frac{\delta Q}{dt} = k(T - T_0)$, burada k kabın ısı iletken kat sayısıdır, T suyun, T_0 ise ortamın sıcaklığıdır. Verilere göre $\frac{\delta Q}{dt} = \frac{cm\Delta T}{dt} = \frac{4.18(kJ/K)\cdot 2K}{20(s)} = 418W$.

Buna göre $1TW = \frac{418}{500} = 0.84W$. Yani bir TW (Türk Watt) normal 0.84Watt'tır.