



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Eylül 2024

Soru:

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ve $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizileri

$$a_1 = 30, \quad b_1 = 31 \quad \text{ve}$$

$$\text{tüm } n \geq 1 \text{ tam sayıları için } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{b_n}, \quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{a_n}$$

olacak şekilde tanımlanıyor. k tam sayısının en küçük hangi değerinde $a_k \geq 60$ olur?

Çözüm: Cevap: 1396.

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + \frac{1}{b_n}}{b_n + \frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{b_n}$$

olduğuna göre, $\frac{a_n}{b_n}$ tüm n değerleri için $\frac{30}{31}$ dir. Buna göre, $a_k > 60$ koşulu $b_k > 62$ ve dolayısıyla $a_k b_k > 60 \cdot 62 = 3720$ koşuluna denktir. a_{n+1} ve b_{n+1} ifadelerinin çarpımından

$$a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n + 2 + \frac{1}{a_n b_n}$$

elde edilir. Buradan her k için $a_k b_k > 30 \cdot 31 + 2(k-1)$ gelir. Sonuç olarak $k = 1396$ durumunda $a_k b_k > 3720$ eşitsizliği sağlanıyor. $k = 1395$ durumunda

$$a_k b_k = 1396 - 2 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{a_i b_i} < 1396 - 2 + \frac{1394}{30 \cdot 31} < 1396$$

olur. Sonuç olarak k tam sayısının en küçük değeri 1396 dır.