



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ocak 2024

Soru:

Bir masa üzerinde birkaç kırmızı ve birkaç beyaz kutu var. Bu kutuların her birinde en az bir top bulunuyor ve her topun üzerinde 1111 sayısından büyük olmayan bir pozitif tam sayı yazılmıştır.

† Herhangi iki kutuda farklı sayıda top bulunuyor.

†† Aynı kutuda bulunan herhangi iki topun üzerindeki sayılar farklıdır.

††† Her $1 \leq i \leq 1111$ sayısı için en fazla bir kırmızı kutunun içinde üzerinde i sayısı yazılmış bir top bulunuyor.

†††† Her $1 \leq i \leq 1111$ sayısı için en fazla bir beyaz kutunun içinde üzerinde i sayısı yazılmış bir top bulunuyor .

††††† $1 \leq i \leq 1111$, $1 \leq j \leq 1111$ ve $i \neq j$ olmak üzere üzerinde i ve j sayıları yazılmış herhangi iki top en fazla bir kutunun içinde bulunuyor.

Masa üzerindeki toplam kutu sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: 57.

İlk önce R_1, R_2, \dots, R_{38} olarak işaretlenmiş 38 kırmızı ve $W_{39}, W_{40}, \dots, W_{57}$ olarak işaretlenmiş 19 beyaz kutu için bir örnek verelim. Üzerinde $1, 2, \dots, 1002$ sayıları yazılmış 1102 topu sırasıyla 741 ve 361 elemandan oluşan A ve B gruplarına ayıralım. A grubundaki toplar

$$A' = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_+, i + j \leq 39\}$$

olmak üzere, A' kümesindeki farklı (i, j) pozitif tam sayı ikilileriyle etiketleniyor.

B grubundaki toplar

$$B = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_+, i \leq 19, j \leq 19\}.$$

olmak üzere, B' kümesindeki farklı (i, j) pozitif tam sayı ikilileriyle etiketleniyor.

$1 \leq k \leq 38$ olmak üzere, kırmızı R_k kutusuna A grubundan $i = 39 - k$ koşulunu sağlayan k top yerleştiriyoruz. $39 \leq k \leq 57$ olmak üzere, beyaz W_k kutusuna A ve B gruplarından $i = 58 - k$ koşulunu sağlayan k yerleştiriyoruz. Bu dağılımda koşullar sağlanıyor: A grubundaki her top tam olarak bir kırmızı kutuda ve en fazla bir beyaz kutuda bulunuyor ve B grubundaki her top tam olarak bir beyaz kutuda bulunuyor.

Şimdi de koşulları sağlayan n kutu için $n \leq 57$ olduğunu göstereceğiz. En fazla top içeren 38 kutu alalım. Genelliği bozmadan bu kutular R_1, R_2, \dots, R_m ve W_{m+1}, \dots, W_{38} olsun. R_i ve W_j kutularındaki toplar $P(i)$ ve $Q(j)$ olsun. Koşullara göre, $|P_i \cap Q_j| \leq 1$ ve her $i \neq j$ için $|P_i \cap P_j| = 0$ ve $|Q_i \cap Q_j| = 0$. Buna göre,

$$\begin{aligned} & \sum |P_i| + \sum |Q_i| \\ &= |P_1 \cup \dots \cup P_k \cup Q_{m+1} \cup \dots \cup Q_{38}| + \sum |P_i \cap Q_j| \\ &\leq 1111 + k(38 - k) \leq 1472. \end{aligned}$$

Diğer taraftan herhangi iki kutuda farklı sayıda top bulunduğna göre,

$$\sum |P_i| + \sum |Q_i| \geq n + (n - 1) + \dots + (n - 37) = (2n - 37) \cdot 19$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak $2n - 37 < 78$ ve $n \leq 57$ olur.

Not: Top sayısı l ise cevap $n(n + 1) \leq 3l$ koşulunu sağlayan en büyük tam sayıdır.