**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Kasım 2023

**Soru:**

Derecesi $n$ olan gerçel katsayılı bir polinomun en fazla bir katsayısı 0 olup en az $n$ katsayısı birbirine eşittir. Polinomun $n$ kökünün tamamı gerçel sayı ise, $n$ sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

**Çözüm:** Cevap: $n$ sayısının alabileceği en büyük değer $n = 4$.

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = (x-1)(x-1)(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2})(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2})$$

polinomu şartları sağlar. Şimdi de $n \geq 5$ için şartları sağlayan bir polinomun bulunmadığını gösterelim. Genelliği bozmadan polinomun en az $n$ katsayısının 1 olduğunu varsayabiliriz.

Polinomun kökleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, köklerin $k$-li çarpımlarının toplamı ise $S_k$ olsun:

$$S_1 = x_1 + \cdots x_n, S_2 = x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n, \ldots, S_n = x_1x_2 \cdots x_n$$

Vieta teoreminden

$$S_1^2 - 2S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

elde edilir. Polinomun ilk üç katsayısı 1 olursa bu yukarıdaki eşitsizlikle çelişir:

$$S_1 = -1,\ S_2 = 1 \text{ ve } S_1^2 - 2S_2 = -1 < 0.$$

Demek ki ilk üç katsayıdan biri 1 den farklı olmalıdır. Bu durumda polinomun sabit terimi 1 olup köklerin hiçbiri 0 değildir. Bu durumda

$$\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^2 - 2\left(\frac{S_{n-2}}{S_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} > 0$$

elde edilir. Polinomun son üç katsayısı 1 olursa bu yukarıdaki eşitsizlikle çelişir:

$$S_{n-2} = -S_{n-1} = S_n \text{ ve } \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^2 - 2\left(\frac{S_{n-2}}{S_n}\right) < 0.$$

Polinomun $n+1$ katsayısından $n$ tanesi 1 olduğundan $n \geq 5$ durumunda ya ilk üç ya da son üç katsayı 1 olmalıdır, çelişki.