



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Eylül 2023

Soru:

k bir pozitif tam sayı olmak üzere, 63 elemandan oluşan bir \mathcal{S} kümesinin her elemanı k elemanlı bir kümedir. \mathcal{S} kümesinin birbirinden farklı herhangi iki A ve B elemanı için $A \Delta B$ de \mathcal{S} kümesinin bir elemanı ise, k sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Not: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ dir.

Çözüm: Cevap: m bir pozitif tam sayı olmak üzere, $k = 32m$.

$A \in \mathcal{S}$ ve $x \in A$ olsun. \mathcal{S} deki x elemanı nı içeren tüm kümelerin kümesi \mathcal{S}_x , \mathcal{S} deki kalan kümelerin kümesi $\bar{\mathcal{S}}_x = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_x$ olsun. Herhangi iki farklı $B \in \mathcal{S}_x$ ve $C \in \mathcal{S}_x$ için $A \Delta B \in \bar{\mathcal{S}}_x$ ve $A \Delta C \in \bar{\mathcal{S}}_x$ kümeleri de farklı olacaktır. Her $D \in \bar{\mathcal{S}}_x$ için $A \Delta D \in \mathcal{S}_x$ ve $A \Delta (A \Delta D) = D$ olduğuna göre $|\mathcal{S}_x \setminus A| = |\bar{\mathcal{S}}_x|$ olur. $|\mathcal{S}| = 63$ olduğundan buradan $|\mathcal{S}_x| = 32$ gelir. $N = |\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U|$ olsun. $y \in U$ olmak üzere, tüm (y, U) ikililerini iki farklı şekilde sayarsak $32N = 63k$ gelir. Buna göre, $32|k$ ve $k = 32m$.

Şimdi $k = 32m$ için bir örnek vereceğiz. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $k = 32m$ ve $L = \{1, 2, \dots, 6\}$ olsun. İlk olatrak öyle T_1, T_2, \dots, T_6 kümeleri tanımlayalım ki, her $R \subseteq L$ için

$$T_R = \left(\bigcap_{r \in R} T_r \right) \setminus \left(\bigcup_{r \in L \setminus R} T_r \right)$$

kümesi tam olarak m eleman içersin.

Birkaç küme arasında simetrik fark işlemi değişmeli olup işlem sırasından bağımsızdır. Buna göre, $\Delta_{j \in J} T_j$ ifadesi doğru şekilde tanımlanmıştır. Her $J \subseteq \{1, 2, \dots, 6\}$, için

$$\Delta_{j \in J} T_j = \bigcup_{R \subseteq L, |R \cap J| \text{ tek sayıdır}} T_R$$

olduđu kolayca gösterilebilir. Her boř olmayan J kümesi verildiđinde $|R \cap J|$ ifadesini tek sayı yapan 2^5 tane $R \subseteq L$ alt kümesi bulunur. Buna göre, $|\Delta_{j \in J} T_j| = 32m$ olur.

Tanımlara göre, farklı boş olmayan J_1 ve J_2 kümeleri farklıysa, bunlara karşılık gelen $\Delta_{j \in J_1} T_j$ ve $\Delta_{j \in J_2} T_j$ kümeleri de farklıdır. Diđer taraftan,

$$(\Delta_{j \in J_1} T_j) \Delta (\Delta_{j \in J_2} T_j) = \Delta_{j \in J_1 \Delta J_2} T_j.$$

Sonuç olarak, $2^6 - 1 = 63$ eleman içeren

$$\mathcal{S} = \{\Delta_{j \in J} T_j : J \subseteq L, J \neq \emptyset\}$$

kümesi gereken koşulları sağlıyor.