



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Temmuz - Ağustos 2023

Soru:

a, b, c, d pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{(a^2 + b^2 + 2c^2 + 3d^2)(2a^2 + 3b^2 + 6c^2 + 6d^2)}{(a + b)^2(c + d)^2}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm: Cevap: 6.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + 2c^2 + 3d^2)(6c^2 + 6d^2 + 3b^2 + 2a^2) \\ & \geq 6(ad + bc + ac + bd)^2 = 6(a(c + d) + b(c + d))^2 = 6(a + b)^2(c + d)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\frac{(a^2 + b^2 + 2c^2 + 3d^2)(2a^2 + 3b^2 + 6c^2 + 6d^2)}{(a + b)^2(c + d)^2} \geq 6$$

olur. Sorudaki ifade 6 değerini

$$(a, b, c, d) = \left(\sqrt[4]{6}, \sqrt[4]{\frac{27}{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1 \right)$$

durumunda alıyor.