



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2023

Soru:

$xy > \frac{1}{2}$ ve $yz > 1$ eşitsizliklerinden en az birini sağlayan x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$xy^3z^2 + \frac{4z}{x} - 8yz - \frac{4}{xy}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm: Cevap: - 8. Eşitlik $xy = 1$ ve $yz = 2$ durumunda sağlanır.

Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$2y - \frac{1}{x} \leq xy^2 \quad \text{ve} \quad 4z - \frac{4}{y} \leq yz^2 \quad (1)$$

elde edilir. $xy > \frac{1}{2}$ ve $yz > 1$ eşitsizliklerinden en az birinin sağlandığına göre,

$$2y - \frac{1}{x} > 0 \quad \text{ve} \quad 4z - \frac{4}{y} > 0$$

eşitsizliklerinden de en az biri sağlanır. Buna göre, (1) deki iki eşitsizliği taraf tarafa çarparak

$$-8 - \frac{4z}{x} + 8yz + \frac{4}{xy} = (2y - \frac{1}{x})(4z - \frac{4}{y}) \leq xy^3z^2$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$xy^3z^2 + \frac{4z}{x} - 8yz - \frac{4}{xy} \geq -8.$$