



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2023

Soru:

Bir okulda her $1 \leq \ell \leq 111$ tam sayısı için tam olarak ℓ arkadaşı olan bir öğrenci bulunuyor. Bu okulda üçü de birbiriyle arkadaş olan bir öğrenci üçlüsü bulunmadığına göre, okuldaki öğrenci sayısı en az kaç olabilir?

Çözüm: Cevap: 167.

Sorudaki 111 yerine k yazalım. Okuldaki öğrenci sayısını N ise $N \geq \frac{3k}{2}$ olduğunu gösterelim. A nın arkadaşları B_1, B_2, \dots, B_k olsun. Bu okulda üçü de birbiriyle arkadaş olan bir öğrenci üçlüsü bulunmadığına göre, bu öğrenciler aralarında arkadaş ikilisi olmaz. Buna göre, bir $1 \leq m \leq k$ için B_m nin arkadaş sayısı en az $\frac{k}{2}$ olursa toplam öğrenci sayısı en az

$$k + 1 + \frac{k}{2} - 1 = \frac{3k}{2}$$

olur. Diğer durumda her $1 \leq i \leq k$ için B_i nin arkadaş sayısı $\frac{k}{2}$ sayısından azdır. Buna göre, arkadaş sayıları en az $\frac{k}{2}$ ve en fazla $k - 1$ olan öğrenciler A nın arkadaşı değil ve toplamda en az

$$k + 1 + k - \frac{k}{2} - 1 = \frac{3k}{2}$$

öğrenci vardır.

$k = 111$ durumunda $N = 167$ için örnek verelim:

Öğrenciler A_1, \dots, A_{56} ve B_1, \dots, B_{111} olmak üzere, $1 \leq i \leq 56$, $1 \leq j \leq 111$ ve $i \leq j$ koşullarını sağlayan her (i, j) ikilisi için A_i ve B_j aralarında arkadaş olursa koşullar sağlanır.