



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ocak 2021

Soru: Başlangıçta masanın üzerinde birbirinden farklı 2021 kutu bulunuyor. İlk aşamada Aslı ve Zehra, ilk hamleyi Aslı yapmak üzere, sırayla 2019'ar hamle yapıyorlar ve her hamlede sırası gelen tahtada yazılı olmayan bir kutu ikilisi (kutularında sıra önemli değildir) seçip tahtaya yazıyor. İkinci aşamada Zehra tahtadaki ikilileri 1 den 4038 ye kadar istediği gibi numaralandırıyor ve k numaralı ikilideki kutulara k şer top koyuyor. Zehra, kutulardaki top sayılarının birbirinden farklı olmasını garantileyebilir mi?

Çözüm: Cevap: Zehra, kutulardaki top sayılarının birbirinden farklı olmasını garantileyebilir. Aslı, ilk hamlesinde tahtaya (A_1, A_2) kutu ikilisini yazsın. Zehra ilk aşamadaki hamlelerinde tahtaya mümkünse sadece A_1 kutusunu içeren kutu ikililerini yazarak tüm (A_1, A_i) $i = 2, 3, \dots, 2021$ ikililerinin tahtaya yazılmasını garantileyebilir. İkinci aşamada Zehra, ilk önce A_1 kutusunu içermeyen 2015 kutu ikililerini $1, 2, \dots, 2018$ sayılarıyla rastgele numaralandırıp bu numaralandırmaya göre kutulara topları dağıtıyor. A_i kutusundaki top sayısı $t(A_i)$ olsun. Genelliği bozmadan, bu işlem sonucunda

$$t(A_2) \leq t(A_3) \leq \dots \leq t(A_{2021})$$

olduğunu varsayabiliriz. Daha sonra Zehra $i = 2, 3, \dots, 2021$ olmak üzere, (A_1, A_i) ikilisini $2017 + i$ sayısı ile numaralandırıp buna göre topları dağıtırsa,

$$t(A_2) < t(A_3) < \dots < t(A_{2021})$$

olur. $i = 2, 3, \dots, 2021$ olmak üzere her A_i kutusuna en fazla 2019 kez top yerleştirilmiştir ve bu işlemlerin sadece birinde yerleştirilen top sayısı 2018 den fazla olmuştur. Bu nedenle

$$t(A_1) = 2019 + 2018 + \dots + 4038 > 2018 \cdot 2018 + 4038 > t(A_i)$$

ve sonuç olarak tüm kutulardaki top sayıları birbirinden farklıdır.