



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ekim 2020

**Soru:**

1001 kentten oluşan bir ülkede  $n$  kent ikilisi arasında çift yönlü uçak seferleri düzenlenmektedir. Ülkedeki her  $(A, B)$  kent ikilisi için  $A$  kentinde başlayıp  $B$  kentinde biten, tüm diğer kentlere tam olarak birer kez uğrayan ve 1000 uçuştan oluşan bir uçuşlar dizisi bulunuyor. Buna göre,  $n$  sayısının alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

**Çözüm:** Cevap: 1502.

Soruyu çizge teorisi kavramlarıyla ifade edelim. Herhangi iki köşesi arasında Hamilton yolu olan 1001 köşeli bir çizgede kenar sayısı en az kaç olur? Tüm köşelerin derecelerinin en az 3 olduğunu gösterelim. Komşuları  $B$  ve  $C$  olan bir  $A$  köşesinin derecesi 2 olursa  $B$  köşesinde başlayıp  $C$  köşesinde biten bir Hamilton yolu olamaz. Benzer şekilde  $A$  köşesinin derecesi 0 ve 1 olamaz. Buna göre, çizgedeki tüm derecelerin toplamı en az 3003 ve kenar sayısı en az  $\lceil \frac{3003}{2} \rceil = 1502$  olur.

Şimdi kenar sayısı 1502 olan bir  $G$  çizgesi inşa edelim.  $G$  çizgesinin köşelerinin koordinatları

$$(1, 0), (2, 0), (3, 0), \dots, (500, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots, (500, 1) \text{ and } (0, 0).$$

olsun.  $G$  de her  $i = 1, 2, \dots, 499$  için  $(i, 0)$  ve  $(i + 1, 0)$  arasında ve  $(i, 1)$  ve  $(i + 1, 1)$  arasında kenar olsun.  $G$  de her  $i = 1, 2, \dots, 500$  için  $(i, 0)$  ve  $(i, 1)$  arasında kenar olsun. Son olarak  $(0, 0)$  ile  $((0, 1), (1, 0), (500, 0)$  ve  $(500, 1)$  arasında 4 tane kenar olsun. 1502 kenarı olan bu  $G$  çizgesinin koşulları sağladığını gösterelim.

$1 < m < n < 250$  olmak üzere,  $(2m, 0)$  ve  $(1, 2n + 1)$  köşeleri arasındaki Hamilton yolu

$$\begin{aligned} &(2m, 0) \rightarrow (2m + 1, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (2n, 0) \rightarrow (2n, 1) \rightarrow (2n - 1, 1) \rightarrow \dots \\ &\rightarrow (2m, 1) \rightarrow (2m - 1, 1) \rightarrow (2m - 1, 0) \rightarrow (2m - 2, 0) \rightarrow (2m - 2, 1) \rightarrow \text{zigzak} \\ &\rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (500, 1) \rightarrow (500, 0) \rightarrow (499, 0) \end{aligned}$$

$$\rightarrow (499, 1) \rightarrow \text{zigzak} \rightarrow (2n + 2, 1) \rightarrow (2n + 2, 0) \rightarrow (2n + 1, 0) \rightarrow (2n + 1, 1)$$

olacaktır.

$1 < m < n < 250$  olmak üzere,  $(0, 0)$  ve  $(2m, 0)$  köşeleri arasındaki Hamilton yolu

$$(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow \text{zigzak} \rightarrow (2m, 1) \rightarrow (2m+1, 1) \rightarrow (2m+2, 2)$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow (499, 1) \rightarrow (500, 1) \rightarrow (500, 0) \rightarrow (499, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (2m + 1, 0) \rightarrow (2m, 0)$$

olacaktır. Diğer durumlardaki Hamiltonian yolları da tamamen benzer şekildedir. İspat tamamlanmıştır.