



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Temmuz-Ağustos 2020

Soru:

$A_1A_2A_3A_4$ teğetler dörtgeninin çevre uzunluğu p_1 , köşegenlerinin uzunlukları toplamı k_1 ve $B_1B_2B_3B_4$ teğetler dörtgeninin çevre uzunluğu p_2 , köşegenlerinin uzunlukları toplamı k_2 olmak üzere

$$p_1^2 + p_2^2 = (k_1 + k_2)^2$$

ise $A_1A_2A_3A_4$ ve $B_1B_2B_3B_4$ dörtgenlerinin eş kareler olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Lemma. Her $ABCD$ dışbükey dörtgeninde

$$(AB + CD)^2 + (BC + AD)^2 \geq (AC + BD)^2$$

eşitsizliği sağlanıyor. Eşitlik sadece $ABCD$ dikdörtgen olursa sağlanır.

İspat: By Batlamyus eşitsizliğine göre

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

ve paralelkenar eşitsizliğine göre

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \geq AC^2 + BD^2.$$

Buradan

$$\begin{aligned} (AB + CD)^2 + (BC + AD)^2 &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + 2(AB \cdot CD + BC \cdot AD) \\ &\geq AC^2 + BD^2 + 2 \cdot AC \cdot BD = (AC + BD)^2. \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliklerin sağlanması için $ABCD$ nin bir kirisler dörtgeni ve aynı zamanda bir paralelkenar olması gerekiyor. Buna göre, eşitlik durumunda $ABCD$ bir dikdörtgen

oluyor.

Lemmadan

$$(A_1A_2 + A_3A_4)^2 + (A_2A_3 + A_1A_4)^2 \geq (A_1A_3 + A_2A_4)^2$$

gelir. $A_1A_2A_3A_4$ çevre uzunluğu p_1 olan bir teğetler dörtgeni olduğu için

$$p_1^2 = 2(A_1A_2 + A_3A_4)^2 + 2(A_2A_3 + A_1A_4)^2.$$

Köşegenlerin uzunlukları toplamı k_1 olduğuna göre,

$$p_1^2 \geq 2(A_1A_3 + A_2A_4)^2 = 2k_1^2.$$

Benzer şekilde

$$p_2^2 \geq 2k_2^2$$

elde edilir. Son olarak Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$p_1^2 + p_2^2 \geq 2(k_1^2 + k_2^2) \geq (k_1 + k_2)^2$$

gelir. Sorudaki koşul son eşitlikteki eşitlik durumudur. Lemmadaki eşitlik durumuna göre, dörtgenler dikdörtgen olma zorundadır. Her iki dörtgen aynı zamanda teğetler dörtgeni olduğu için kare olma zorundadır. Son olarak Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin eşitlik durumundan $k_1 = k_2$ gelir ve dörtgenler eş kareler olur.