



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Kasım 2019

**Soru:**

Bir ülkede herhangi iki kent arasındaki karşılıklı direct uçak seferleri  $r \geq 3$  hava yolu şirketinin tam olarak biri tarafından yapılmaktadır. Bu hava yolu şirketlerinden hangisi alınrsa alınsın, sadece bu şirketin seferlerini kullanarak her kentten her kente ulaşılabileceği biliniyor. Aralarındaki direct uçak seferleri üç farklı şirket tarafından yapılan üç kentin bulunduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

Problemi çizge kavram kullanarak yeniden ifade edelim: Bir tam çizgenin her kenarı  $r \geq 3$  renkten birine boyanmıştır. Herhangi bir renkten farklı renge boyanmış tüm kenarlar silindikten sonra çizge bağlantılı kalıyorsa, çizgede kenarları üç farklı renge boyalı bir üçgen bulunduğunu gösteriniz.

Kenarları üç farklı renge boyalı üçgen içermeyen çizgelerin bulunduğunu varsayalım. Bu çizgelerden en az köşesi olan çizge  $G$  olsun.  $x$ ,  $G$  nin herhangi bir köşesi olsun. Bu köşeden her renkten kenar çıkacaktır.  $G$  den  $x$  köşesini ve bu köşeden çıkan tüm kenarları atalım:  $T = G - x$  olsun.  $T$  nin kenarlarının en az üç farklı renge boyalı olduğunu gösterelim:  $T$  nin kenarları sadece 1 ve 2 renklerine boyalıysa,  $G$  farklı bir 3 rengi ile bağlantılı olduğu için  $x$  köşesinden çıkan tüm kenarların rengi 3 olma zorundadır, çelişki.  $G$ , en az sayılı çizge olduğu için  $T$  bir 0 rengi ile bağlantılı değildir.  $T$  nin 0 rengi ile bağlantılı alt çizgeleri  $T_1, T_2, \dots$  olsun. Üç renkli üçgen bulunmadığı için her  $(i, j)$  ikilisi için,  $T_i$  ve  $T_j$  yi birleştiren tüm kenarlar 0 dan farklı tek bir renge boyalıdır.  $(x, a)$  ve  $(x, b)$  1 ve 2 renklerine boyalı iki kenar olsun.  $a$  ve  $b$  farklı  $T_1$  ve  $T_2$  alt çizgelerin elemanıysa,  $c \in T_1$  ve  $d \in T_2$  olmak üzere, 0 rengine boyalı  $(x, c)$  ve  $(x, d)$  kenarlarını alalım. Üç renkli üçgen bulunmadığı için  $(c, b)$  2 ve  $(a, d)$  1 rengindedir, bu da  $T_1$  ve  $T_2$  yi birleştiren tüm kenarların tek renge boyalı olduğu ile çelişiyor.  $a$  ve  $b$  bir  $T_1$  alt çizgesinin elemanıysa,  $c \in T_2$  olmak üzere, 0 renkli bir  $(x, c)$  kenarı alalım. Şimdi de  $(a, c)$  kenarı 1,  $(b, c)$  kenarı ise 2 renginde olma zorundadır ve bu da yine  $T_1$  ve  $T_2$  yi birleştiren tüm kenarların tek renge boyalı olduğu ile çelişiyor.