



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Şubat 2019

**Soru:**

Başlangıçta masa üzerindeki  $k$  öbekte toplam 2019 boncuk bulunuyor. Her işlemde bir öbek seçilip iki öbeğe bölünüyor (bu iki öbek eşit sayıda boncuk içermeyebilir) ya da masadan kaldırılıyor. Her başlangıç durumu için birkaç işlem sonucunda masada birbirinden farklı sayıda boncuk içeren  $k$  öbek oluşturulabiliyorsa,  $k$  nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

**Çözüm:** Cevap: 45.

Masada birbirinden farklı sayıda boncuk içeren  $k$  öbek oluşturulabiliyorsa, başlangıçta en çok boncuk içeren öbekte en az  $k$  boncuk bulunma zorundadır.  $k \geq 46$  durumunda  $45 \cdot k > 2019$  olduğuna göre, başlangıçta her birinde en fazla 45 boncuk bulunan  $k$  öbek olabiliyor ve bu durumda da birbirinden farklı sayıda boncuk içeren  $k$  öbek oluşturulamıyor. Buna göre,  $k$  nin alabileceği en en büyük değer 45 den fazla olamaz.

*Lemma.*  $k$  öbekte en az  $k(k-1) + 1$  boncuk bulunuyorsa,  $1, 2, \dots, k$  boncuk içeren  $k$  öbek oluşturulabilir.

İspat  $k$  üzerinden tümevarımla yapılacaktır.  $k = 1$  durumu açıktır. Lemma  $k = n$  için doğru olsun. Masada toplamda  $n(n+1) + 1$  boncuk bulunduran  $n+1$  öbek olsun. O zaman en büyük öbekte en az  $n+1$  boncuk olacaktır. Bu öbekteki boncuk sayısı tam olarak  $n+1$  ise, kalan  $n$  öbekte  $n(n+1) + 1 - (n+1) = n^2 \geq n(n-1) + 1$  boncuk bulunacak ve tümevarım varsayımına göre bunlardan  $1, 2, \dots, n$  boncuk içeren  $n$  öbek oluşturulacaktır. Masada  $n+1$  boncuk içeren öbek de bulunduğu göre ispat tamamlanmıştır. En büyük öbekteki boncuk sayısı  $n+1$  den fazla ise, bu öbeği  $n+1$  boncuk içeren  $H(n+1)$  ve bir diğer öbeğe bölelim. O zaman masada  $H(n+1)$  dışında toplamda  $n(n+1) + 1 - (n+1) = n^2$  boncuk içeren  $n+1$  öbek oluşacaktır. En küçük öbekte en fazla  $n-1$  boncuk olacağına göre, bu öbek masadan kaldırılırsa, kalan  $n$  öbekte toplamda en az  $n^2 - (n-1) = n(n-1) + 1$  boncuk bulunacaktır. Tümevarım varsayımına göre bunlardan  $1, 2, \dots, n$  boncuk içeren  $n$  öbek oluşturulacaktır. Masada  $H(n+1)$  öbeği de bulunduğu göre ispat tamamlanmıştır.

$2019 > 45 \cdot 44 + 1$  olduğuna göre lemmayı kullanarak  $1, 2, \dots, 45$  boncuk içeren  $k$  öbek oluşturulabilir.