



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Kasım 2018

Soru:

a ve b tam sayılar olmak üzere $\text{ebob}(a, b) = 1$ ise (a, b) koordinatlı kafes noktasına *temel nokta* diyelim. Köşeleri temel noktalar olan bir çizge şu kurala göre kenarlar çizilerek meydana getiriliyor: (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) koordinatlı temel noktalar arasında ancak ve ancak $2a_1 = 2a_2 \in \{b_1 - b_2, b_2 - b_1\}$ veya $2b_1 = 2b_2 \in \{a_1 - a_2, a_2 - a_1\}$ sağlanıyorsa kenar vardır. Daha sonra bu çizge, bazı kenarları silinerek orman haline getirilecektir. Bu ormanı elde etmek için en az kaç kenar silinmelidir? Böyle bir ormanda en az kaç ağaç bulunabilir?

(Orman, kesişmeyen ağaçların birleşimidir.)

Çözüm: Cevap: 1 kenar, 5 ağaç.

(a, b) noktası ile $(a, b \pm 2a)$, $(a \pm 2b, b)$ noktaları arasında kenar bulunuyor. Bu nedenle birkaç özel durum dışında her noktanın derecesi 4'e eşittir. Şimdi birkaç özel durum dışında (a, b) noktasıyla bileşik olan 4 noktadan tam olarak birinin merkez noktasına (a, b) noktasından daha yakın olduğunu gösterelim. $(a, b) \in \{(\pm 1, \pm 1), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$ durumları dışında genelliği bozmadan $0 < |a| < |b|$ kabul edebiliriz. O zaman $|b \pm 2a|$ sayılarından biri $|b|$ sayısından büyük, diğeri ise daha küçük olacaktır ve $|a \pm 2b|$ sayılarının her ikisi de $|a|$ sayısından büyük olacaktır. Bu nedenle $(a, b \pm 2a)$, $(a \pm 2b, b)$ noktalarından tam olarak biri merkeze (a, b) noktasından daha yakın, kalan üçü ise daha uzak olacaktır.

$\{(\pm 1, \pm 1), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$ köşelerinden oluşan çizgeye *kök* diyelim. O zaman çizgenin her köşesini kökle birleştiren tek bir yol olacaktır. Demek ki çizgeni orman yapmak için sadece kökün bazı kenarlarının silinmesi gerekmektedir ve elde edilecek ormandaki ağaç sayısı kökteki ağaç sayısına eşit olacaktır. 8 köşeden oluşan kök çizgesi $(\pm 1, \pm 1)$ noktalarını içeren bir döngüden ve $(0, \pm 1), (\pm 1, 0)$ ayırık noktalarından oluşuyor. Demek ki silinmesi gereken sadece bir kenar vardır ve oluşacak ormanda 5 ağaç bulunacaktır.