



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2018

**Soru:**

Bir ülkenin bazı kentleri arasında karşılıklı seferler düzenleyen Çizge Hava Yolları'nın (ÇHY) seferlerini kullanarak her kentten her kente ulaşıyor.  $A$  kentinden  $B$  kentine ulaşmak için gereken uçuş sayısının en küçük değeri  $f(A, B)$  olsun.  $A$  ve  $B$  farklı kentler olmak üzere,  $f(A, B)$  sayılarının en büyüğüne hava yolunun parametresi diyelim. ÇHY'ye bir sefer eklendikten sonra şirketin parametresi 33 olduysa, bu sefer eklenmeden önce ÇHY'nin parametresini en fazla kaç olabilirdi?

**Çözüm:** Cevap: ÇHY'nin parametresi en fazla 66 olabilirdi.

Kentler  $A_1, A_2, \dots, A_{67}$  olmak üzere, ÇHY'nin seferleri sadece  $i = 1, 2, \dots, 66$  için  $A_i$  ve  $A_{i+1}$  arasında yapılıyorsa,  $f(A_1, A_{67}) = 66$ . Fakat  $A_1$  ve  $A_{66}$  kentleri ek bir seferle birleştirildikten sonra ÇHY'nin parametresi 33 oluyor. Demek ki cevap en az 66 olma zorundadır.

Şimdi sefer eklenmeden önce herhangi bir kentten bir diğerine en fazla 66 sefer kullanılarak ulaşıldığını göstereceğiz. Aksini varsayalım: bir  $A, B$  ikilisi için  $A$  dan  $B$  ye en az sefer kullanan yol  $(A = A_0, A_1, \dots, A_{33}, A_{34}, \dots, A_n = B)$  olmak üzere,  $f(A, B) > 66$  olsun. Bir  $T, S$  kent ikilisi arasına ek sefer konulduktan sonra  $f(A, A_{34}) \leq 33$  ve  $f(A_{33}, B) \leq 33$  olacaktır. Demek ki  $A$  dan  $A_{34}$  kentine ve  $A_{33}$  den  $B$  kentine giden en kısa yollar yeni eklenen seferi kullanma zorundalar. Genelliği bozmadan  $A$  dan  $A_{34}$  kentine giden en kısa yolun  $(A_0, \dots, T, S, \dots, A_{34})$  olduğunu varsayalım. O zaman  $f(A, T) = l_1, f(S, A_{34}) = l_2$  olmak üzere,  $l_1 + l_2 \leq 32$  olacaktır. Benzer şekilde  $A_{33}$  den  $B$  kentine giden en kısa yolun  $f(A_{33}, T) = m_1, f(S, B) = m_2$  ve  $m_1 + m_2 \leq 32$  olmak üzere,  $(A_{33}, \dots, T, S, \dots, B)$  yada  $f(A_{33}, S) = k_1, f(T, B) = k_2$  ve  $k_1 + k_2 \leq 32$  olmak üzere,  $(A_{33}, \dots, S, T, \dots, B)$  olacaktır. O zaman  $A$  dan  $B$  ye en fazla  $l_1 + m_1 + 1 + l_2 + m_2 < 66$  sefer kullanan  $(A, \dots, T, \dots, A_{34}, A_{33}, \dots, S, \dots, B)$  yolu veya en fazla  $l_1 + k_2 < 66$  sefer kullanan  $(A, \dots, T, \dots, B)$  yolu bulunacaktır. Bu da  $f(A, B) > 66$  varsayımıyla çelişiyor.