



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Haziran 2017

Soru:

Bir ülkedeki 2017 kentten bazıları arasında, herhangi iki kent arasında ulaşımı olanaklı kılacak biçimde karşılıklı uçak seferleri nasıl düzenlenirse düzenlensin; 2017 kentin her birinden tek uçuşla en az bir özel kente varılabilmesi koşuluyla k kent özel ilan edilebiliyorsa, k 'nin alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm: Cevap: $k = 1344$.

Soruyu graf teorisi dilinde yeniden ifade edelim. k 'nin en küçük hangi değerinde 2017 köşesi olan her bağlantılı grafın k köşesini her köşenin en az bir işaretlenmiş komşusu olacak şekilde işaretleyebiliriz?

İlk önce $k \geq 1344$ olduğunu gösterelim. G grafının köşeleri $v_0, v_1^j, v_2^j, v_3^j, j = 1, \dots, 672$ ve kenarları $(v_0, v_1^j), (v_1^j, v_2^j), (v_2^j, v_3^j) j = 1, \dots, 672$ olsun. O zaman her $j = 1, \dots, 672$ için v_1^j, v_2^j, v_3^j üçlüsünde v_3^j köşesinin tek komşusu olan v_2^j ve v_2^j 'nin iki komşusunun en az biri işaretlenmelidir. Sonuç olarak en az $2 \cdot 672 = 1344$ köşe işaretlenecektir.

Şimdi $k \leq 1344$ olduğunu gösterelim. G 'nin bir ağaç olduğunu varsayabiliriz. G 'nin her köşesini 0,1,2 renklerinden birine boyayacağız. İlk önce G 'nin derecesi bir olan bir köşesini 0 rengine boyayalım. Her adımda her boyalı köşenin tüm komşularını, i renkli köşenin komşuları $i + 1 \pmod{3}$ rengine olacak biçimde boyayalım. En fazla 2016 adım sonucunda tüm köşeler boyanmış olacak ve aynı renge boyalı en az 673 köşe bulunacak. Diğer iki renge boyalı tüm köşeleri işaretleyelim. O zaman en fazla 1344 köşe işaretlenecek ve derecesi en az iki olan her köşenin en az bir komşusu işaretlenmiş olacak. Derecesi bir olan i renkli bir v köşesinin tek komşusu $i - 1$ renkli v' köşesi işaretlenmemiş olsun (genelliği bozmadan v 'nin ilk boyanan köşe olmadığını varsayıyoruz). O zaman v işaretlenmiştir ve v' 'nin $i - 2$ renkli bir işaretlenmiş v'' komşusu vardır. Şimdi v' köşesini işaretleyip v 'nin işaretini silerek işaretlenmiş köşe sayısı değişmeyecek ve v 'nin bir işaretlenmiş v' komşusu oluşacaktır. Derecesi bir olup tek komşusu işaretlenmemiş olan başka köşe bulunuyorsa yukarıdaki işaretleme işlemini yeniden uygulayarak sonlu işlem sonucunda koşulları sağlayan işaretleme elde edilecektir.