



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

## AYIN SORUSU

Şubat 2017

**Soru:**  $x + y \geq 0$  koşulunu sağlayan tüm  $x, y$  gerçel sayıları için

$$(x^2 + y^2)^3 \geq M(x^3 + y^3)(xy - x - y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa,  $M$  gerçel sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

**Çözüm:** Cevap:  $M$  sayısının alabileceği en büyük değer 32 dir.

$x = y = 4$  alırsak  $M \leq 32$  elde ederiz. Şimdi

$$(x^2 + y^2)^3 \geq 32(x^3 + y^3)(xy - x - y)$$

eşitsizliğini göstereceğiz.  $s = x^2 + y^2$  ve  $t = x + y$  olsun. O zaman tüm  $2s \geq t^2$  ve  $t \geq 0$  değerleri için

$$s^3 \geq 8t(3s - t^2)(t^2 - 2t - s)$$

olduğunu ispatlayacağız.  $s = rt$  olsun. Şimdi ispatlanması gereken eşitsizlik tüm  $2r \geq t \geq 0$  değerleri için

$$r^3 \geq 8(3r - t)(t - 2 - r)$$

şeklini alıyor. Son olarak tüm  $2r \geq t \geq 0$  değerleri için

$$r^3 - 8(3r - t)(t - 2 - r) = 8(t - (2r + 1))^2 + r^3 - 8r^2 + 16r - 8 \geq r^3 - 8r^2 + 16r = r(r - 4)^2 \geq 0$$

olduğundan ispat tamamlanmıştır.