



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ocak 2017

Soru: m ve n birer pozitif tam sayı ve p bir asal sayı olmak üzere,

$$\frac{5^m + 2^n p}{5^m - 2^n p}$$

ifadesinin bir tam sayının karesi olmasını sağlayan tüm (m, n, p) üçlülerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(m, n, p) = (2, 3, 3), (1, 1, 2), (2, 2, 5)$.

Bir pozitif k tam sayısı için $\frac{5^m + 2^n p}{5^m - 2^n p} = k^2$ olsun. $5^m - 2^n p \mid 5^m + 2^n p$ olduğundan $5^m - 2^n p \mid 2 \cdot 5^m$ elde ediyoruz. $5^m - 2^n p$ tek sayı olduğundan $5^m - 2^n p \mid 5^m$ ve dolayısıyla r negatif olmayan tek sayı olmak üzere, $5^m - 2^n p = 5^r$.

Durum 1. $r = 0$: $5^m - 2^n p = 1$.

$n \geq 3$ ise $5^m \equiv 1 \pmod{8}$ ve buradan s bir pozitif tam sayı olmak üzere, $m = 2s$. O zaman $5^{2s} \equiv 1 \pmod{3}$ ve $2^n p \equiv 0 \pmod{3}$. Buradan $p = 3$ ve $(5^s - 1)(5^s + 1) = 3 \cdot 2^n$. $s > 1$ ise, $5^s + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ olduğundan $5^s + 1$ sayısının 3 ten büyük tek böleni bulunma zorundadır. Bu nedenle $s = 1$ ve buradan da $m = 2, n = 3, k = 7$ elde ediyoruz.

$n = 2$ ise, $8p = (5^m + 2^2 p) - (5^m - 2^2 p) = k^2 - 1$. O zaman l bir pozitif tam sayı olmak üzere, $k = 2l + 1$ ve $2p = l(l + 1)$. Sonuç olarak $p = 3$ ve $5^m = 13$ ile çelişki elde ediyoruz.

$n = 1$ ise, $4p = (5^m + 2^1 p) - (5^m - 2^1 p) = k^2 - 1$. O zaman l bir pozitif tam sayı olmak üzere, $k = 2l + 1$ ve $p = l(l + 1)$. Sonuç olarak $l = 1, p = 2$ ve $k = 3, m = 1$.

Durum 2. $r \geq 1$.

O zaman $5|2^n p$ ve $p = 5$. Buradan $5^{m-1} - 2^n = 5^{r-1}$. $m > r$ ve $5^{r-1}|2^n$ olduğundan $r = 1$ elde ediyoruz. Sonuç olarak $5^{m-1} - 2^n = 1$. $n = 1$ olamaz ve $n = 2$ ise, $m = 2$ and $k = 3$.

$n \geq 3$ ise, $5^{m-1} \equiv 1 \pmod{8}$ ve s bir pozitif tam sayı olmak üzere, $m - 1 = 2s$. Buradan $(5^s - 1)(5^s + 1) = 2^n$ elde ediyoruz. $s \geq 1$ ise, $5^s + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ olduğundan $5^s + 1$ sayısının 1 den büyük tek böleni bulunma zorundadır. Bu nedenle $s = 0$. Fakat bu durumda $2^n = 0$ ile çelişki elde ediyoruz.