

ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА имени В.А.СТЕКЛОВА АН СССР

На правах рукописи

УДК 515.165.4

ДЕГТЯРЕВ Александр Игоревич



ТОПОЛОГИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПЛОСКИХ
ПРОЕКТИВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ
01.01.04 - геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ

доктор физико-математических
наук, доцент ВИРО Олег Янович

ЛЕНИНГРАД - 1987

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА I. ИЗОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ.	7
Терминология, обозначения	7
§ 1. Кривые с глубокими особенностями	10
§ 2. Неприводимые кривые пятой степени	17
§ 3. Приводимые кривые пятой степени	32
ГЛАВА II. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ДОПОЛНЕНИЯ КРИВЫХ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ	39
Терминология, обозначения	39
§ 1. Общие результаты	40
§ 2. Кривые пятой степени	54
§ 3. Исследование некоторых групп	78
ГЛАВА III. МНОГОЧЛЕН АЛЕКСАНДЕРА ПРОЕКТИВНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ	89
Введение	89
§ 1. Смешанные структуры Ходжа	91
§ 2. Циклические разветвленные накрытия	94
§ 3. Поведение комплексов $\Omega^i(X \setminus F)$ и $\Omega^i(X, F)$ при стандартном разрешении особенностей	97
§ 4. Прямые образы пучков $\Omega^\beta(\tilde{X}_N \setminus \tilde{F})$ и $\Omega^\beta(\tilde{X}_N, \tilde{F})$	104
§ 5. Проективные гиперповерхности	109
§ 6. Кривые шестой степени	115
ЛИТЕРАТУРА	129

ВВЕДЕНИЕ

Комплексные плоские проективные кривые являются одним из наиболее классических объектов алгебраической геометрии. Несмотря на то, что изучением их топологии занимались еще в 20-е годы такие математики, как Зариский [48-52] и Ван Кампен [35], до сих пор результаты в этом направлении носят фрагментарный характер. Особый интерес представляет вычисление фундаментальных групп дополнения кривых. Эта задача была поставлена О. Зариским [48, 52] в связи с изучением алгебраических поверхностей. В последнее время наблюдается значительный прогресс в этой области. В частности, была доказана (Делинь [27]) и обобщена (Нори [42]) известная гипотеза Зариского, получен ряд общих результатов о фундаментальных группах (см. [24, 30, 36, 43]), вычислены группы некоторых естественно возникающих кривых (см. [13, 28, 41, 44, 45, 46]), начато систематическое изучение многочленов Александера кривых и гиперповерхностей (Либгобер [37 - 40]). Интерес к топологии комплексных кривых мотивируется также недавними успехами топологии вещественных алгебраических кривых.

В настоящей диссертации приведена полная классификация с точностью до жесткой изотопии (т.е. топологической изотопии в классе алгебраических кривых) и вычислены все фундаментальные группы кривых пятой степени, получены некоторые общие результаты о многочленах Александера алгебраических гиперповерхностей, и описаны многочлены Александера неприводимых кривых шестой степени.

Глава I посвящена классификации комплексных плоских проективных кривых пятой степени с точностью до жесткой изотопии.

Основным результатом являются следующие классификационные теоремы для неприводимых кривых (см. § 2).

Теорема 2.1. Не существует неприводимых кривых пятой степени со следующими наборами особенностей:

- | | | |
|-----------------------|----------------------|------------------|
| 1) $6A_2$ | 7) $A_6 + A_4 + A_2$ | 13) $D_4 + 3A_2$ |
| 2) $5A_2 + A_1$ | 8) $A_6 + A_3 + A_2$ | 14) $D_5 + 3A_2$ |
| 3) $A_4 + 4A_2$ | 9) $2A_6$ | 15) $E_6 + 3A_2$ |
| 4) $2A_4 + 2A_2$ | 10) $A_8 + 2A_2$ | 16) $D_7 + 2A_2$ |
| 5) $A_4 + A_3 + 2A_2$ | 11) $A_7 + 2A_2$ | 17) $E_8 + 2A_2$ |
| 6) $2A_3 + 2A_2$ | 12) $A_{10} + A_2$ | |

Теорема 2.2. Существуют неприводимые кривые пятой степени со всеми наборами особенностей, допустимыми ограничением на род (сумма родов особых точек не превосходит 6), за исключением перечисленных в теореме 2.1. Кривые, имеющие одинаковые наборы особенностей, жестко изотопны.

Аналогичные результаты получены и для приводимых кривых пятой степени (см. § 3): перечислены все ограничения на взаимное расположение компонент таких кривых, и доказано, что жесткий изотопический тип кривой определяется очевидными инвариантами - набором особых точек и их расположением на компонентах.

Следует также отметить результаты § I, где описаны некоторые классы кривых с глубокими особенностями, изотопический тип которых определяется очевидными инвариантами.

В главе II вычислены фундаментальные группы дополнения кривых пятой степени. Полный список кривых, имеющих неабелеву группу, приведен в п.2.1. Имеется 56 таких кривых (с точностью до жесткой изотопии), из них лишь две неприводимых.

В § I вычислены фундаментальные группы дополнения кривых с вырожденными особенностями, изученных в § I главы I. Эти результаты имеют самостоятельный интерес, так как доставляют большое количество примеров алгебраических кривых (в том числе и неприводимых), имеющих неабелеву фундаментальную группу. Здесь же получены простейшие верхние оценки на ранг фундаментальной группы и многочлен Александера неприводимой кривой.

Глава III посвящена изучению многочлена Александера проективных гиперповерхностей. Основные результаты сформулированы и доказаны в §§ 5, 6. Пусть $V \subset \mathbb{C}P^n$ - гиперповерхность степени m . Рассмотрим стандартное m -листное циклическое накрытие $\rho: X_m \rightarrow \mathbb{C}P^n \setminus V$ с ветвлением вдоль V . Пусть $\tilde{\rho}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ - композиция пополнения накрытия ρ и разрешения особенностей компактификации покрываемого пространства. Обозначим через $b_q^r(\cdot)$ и $h_q^{r,s}(\cdot)$ соответственно числа Бетти и числа Ходжа, отвечающие собственному числу $\lambda_q = \exp(2\pi i q/m)$ автоморфизма накрытия. Пусть $\mathcal{L}_q(V)$ - линейная система гиперповерхностей степени $q-n-1$ в $\mathbb{C}P^n$, представимых в окрестности каждой особой точки $S \in \text{Sing } V$ таким ростком \mathcal{Y} , что $\text{ord}(\mathcal{Y} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) > q/m - 1$, где $\text{ord } \omega$ - порядок ростка голоморфной n -формы ω в окрестности изолированной особой точки S функции f , локально задающей гиперповерхность V (см. [I]).

Теорема 5.1. 1) $b_q^{n-1}(X_m) \geq h_q^{n,1}(X_m) + h_{m-q}^{n,1}(\tilde{X}_m)$.

2) При $n=2$ и $q \neq 0$ неравенство (1) является равенством

$$3) h_{m-q}^{n,1} = \dim \mathcal{L}_q(V) + 1 + \sum_{S \in \text{Sing } V} d_{q/m}^{\tau}(S) - C_{q-1}^{q-n-1},$$

где $d_{\tau}^{\tau}(S) = \text{Card} \{ \alpha \in \text{Spec } S \mid \alpha > \tau - 1 \}$ при $\tau \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, и через $\text{Spec } S$ обозначен спектр особой точки S (см. [I]).

4) Многочлен Александера $\Delta_V^{n-1}(t)$ делится на $\min \Delta_V^{n-1}(t)$

- минимальный целочисленный многочлен, делящийся на

$$\prod_{q=1}^{m-1} (t - \lambda_q)^{\rho_q + \rho_{m-q}}, \text{ где } \rho_q = \max \left\{ 0, \sum_{S \in \text{Sing } V} d_{q/m}(S) - C_{q-1}^{q-n-1} \right\}.$$

Плоские кривые, для которых $\Delta_V(t) \neq \min \Delta_V(t)$, называются избыточными. Заметим, что многочлен $\min \Delta_V(t)$ зависит лишь от набора особенностей кривой и не зависит от взаимного расположения особых точек в $\mathbb{C}P^2$.

Теорема 6.1. Класс неприводимых избыточных кривых шестой степени совпадает с классом кривых, являющихся образом складки при проектировании на $\mathbb{C}P^2$ кубической поверхности $W \subset \mathbb{C}P^3$, имеющей лишь особые точки типа A_1 . Набор особенностей такой кривой имеет вид $aA_1 + \sum_{\rho=1}^6 b_\rho A_{3\rho-1} + cE_6$, где $\sum \rho b_\rho + 2c = 6$; многочлен Александера равен $t^2 - t + 1$.

Технические результаты главы также представляют самостоятельный интерес. Основными являются теоремы 4.1 и 4.2, описывающие поведение некоторых ходжевых пучков при проекции конечнолистного циклического накрытия с ветвлением вдоль некоторого дивизора F в случаях, когда $\text{red } F$ имеет нормальные пересечения (теорема 4.1), и когда F имеет лишь изолированные особенности (теорема 4.2).

ГЛАВА I. ИЗОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ПЯТОЙ
СТЕПЕНИ

Терминология, обозначения

0.1. Жесткой изотопией кривых C_1 и C_2 степени m называется соединяющий их путь C_t в пространстве кривых степени m , сопровождающийся топологической изотопией пар (C_1^2, C_t) .

0.2. Набор особенностей кривой обозначается выражением вида $\sigma = \sum a_i \delta_i$, где δ_i — обозначения типов особенностей (по [1]), а a_i — количество особых точек данного типа. Неприводимую кривую степени m , имеющую заданный набор особенностей σ , будем, следуя [10], называть кривой типа $C_m(\sigma)$.

0.3. Пусть 0 — точка. Обозначим через E_{x_0} исключительный дивизор, вклеиваемый при раздутии точки 0 . Символ $0 \leftarrow 0'$ обозначает, что точка $0'$ является бесконечно близкой первого порядка к 0 , т.е. что $0' \in E_{x_0}$. Аналогично определяются бесконечно близкие точки высших порядков.

Будем говорить, что точки $0 \leftarrow 0' \leftarrow \dots$ лежат на кривой C , если 0 лежит на C , $0'$ лежит на собственном прообразе кривой C при раздутии точки 0 , и т.д. Аналогично определяются кратности кривой C в точках $0, 0', \dots$.

Существует единственная прямая, на которой лежит пара точек $0 \leftarrow 0'$. Эта прямая обозначается символом $(00')$.

0.4. Особая точка 0 кривой C типа A_ρ ($\rho \geq 3$) определяет пару точек $0 \leftarrow 0'$, лежащих на кривой C . Аналогично, особая точка 0 типа A_ρ ($\rho \geq 5$) определяет тройку точек $0 \leftarrow 0' \leftarrow 0''$, лежащих на кривой C .

0.5. Пусть фиксирована система координат, и точка 0 име-

ет координаты $(1 : 0 : 0)$. Тогда имеются очевидные взаимно однозначные соответствия между точками $o' \in E x_0$, прямыми (oo') и точками $(x_1 : x_2) \in \{x_0 = 0\}$. Корнем однородного многочлена $\rho(x_1, x_2)$ будем называть такую точку $(x_1 : x_2)$, что

$\rho(x_1, x_2) = 0$, а также соответствующие ей точку $o' \in E x_0$ и прямую (oo') . Кратность корня обозначается через $\tau_\rho(o')$. (Кратность точки, не являющейся корнем, равна нулю). Как правило, корень многочлена зависит от выбора системы координат, но в ряде случаев корни и их кратности имеют инвариантный смысл (см., например, п. I.1 и I.2).

0.6. Через $T(o_1, o_2, o_3)$ обозначается квадратичное бирациональное преобразование с фундаментальными точками o_1, o_2, o_3 .

Если среди этих точек нет бесконечно близких, то T - треугольное преобразование, которое в подходящей системе координат может быть задано выражениями $\bar{x}_0 = x_1 x_2, \bar{x}_1 = x_0 x_2, \bar{x}_2 = x_0 x_1$. Преобразование заключается в раздутии точек o_1, o_2, o_3 и стягивании собственных прообразов соединяющих эти точки прямых (рис. 0.1).

Если $o_1 \leftarrow o_2$, то T может быть задано выражениями $\bar{x}_0 = x_0^2, \bar{x}_1 = x_0 x_1, \bar{x}_2 = x_1 x_2$, и заключается в раздутии всех фундаментальных точек и последовательном стягивании прямых $(o_1 o_2), (o_1 o_3)$ и $E x_{o_1}$ (рис. 0.2).

Наконец, если $o_1 \leftarrow o_2 \leftarrow o_3$, то T может быть задано выражениями $\bar{x}_0 = x_0^2, \bar{x}_1 = x_0 x_1, \bar{x}_2 = x_0 x_2 + x_1^2$, и заключается в последовательном раздутии точек o_1, o_2, o_3 и стягивании прямых $(o_1 o_2), E x_{o_2}, E x_{o_1}$ (рис. 0.3).

Преобразование, обратное к T , имеет во всех трех случаях тот же вид, что и прямое преобразование.

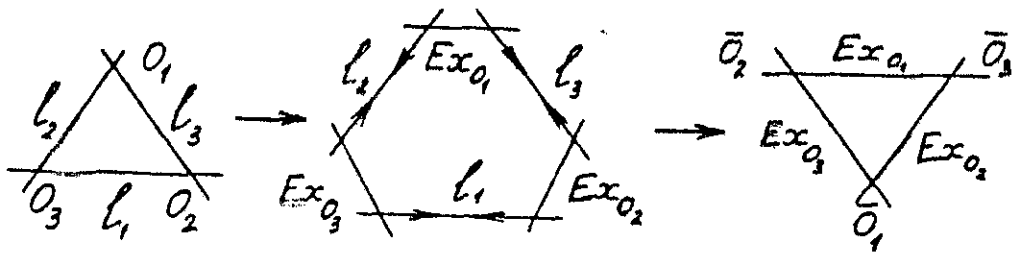


рис. 0.1.

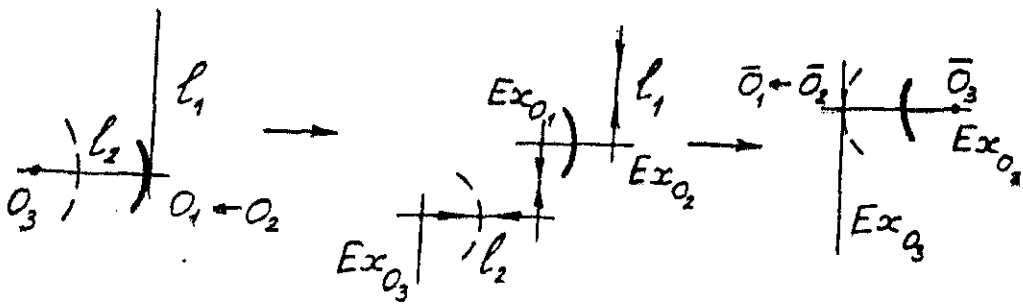


рис. 0.2.

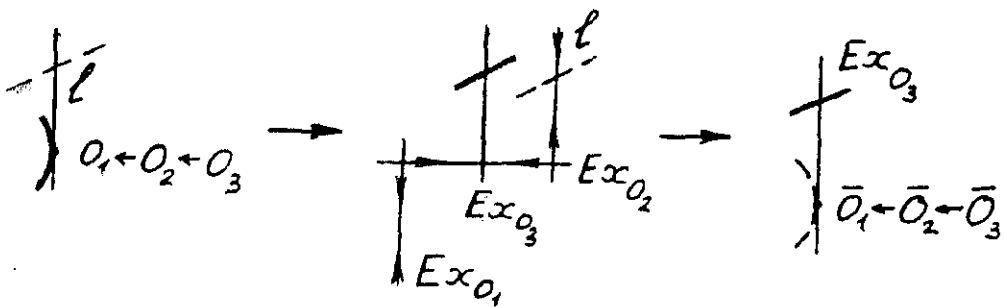


рис. 0.3.

§ I. Кривые с глубокими особенностями

I.I. Кривые с особой точкой кратности $\text{deg } C - 1$

Пусть кривая C степени m имеет особую точку O кратности $m-1$. Предположим, что C не имеет кратных компонент. Пусть точка O имеет координаты $(1 : 0 : 0)$. Тогда уравнение кривой представимо в виде $x_0 A(x_1, x_2) + B(x_1, x_2) = 0$, где A и B - однородные многочлены степеней $m-1$ и m соответственно.

Пусть $O_i \in E x_0$ ($i = 1, \dots, \alpha$) - бесконечно близкие к O точки, лежащие на C , и ρ_i - локальные индексы пересечения $(C \circ E x_0)_{O_i}$, или, что равносильно, кратности $\tau_A(O)$. Неупорядоченный набор кратностей $\{\rho_i\}$ является, очевидно, топологическим инвариантом особой точки O , и, следовательно, кривой C . Сумма кратностей равна $m-1$. Некоторые из точек O_i могут быть (простыми) корнями многочлена B . Это означает, что прямая (OO_i) является компонентой кривой C . Назовем формулой кривой C набор кратностей $\{\rho_i\}$, в котором кратности точек O_i , являющихся корнями многочлена B , уменьшены на 1 и отмечены. Формула является очевидно, топологическим инвариантом кривой. (Уменьшенные на 1 отмеченные кратности равны локальным индексам пересечения с $E x_0$ "основной" компоненты кривой C , полученной удалением из нее всех прямых, проходящих через точку O).

Теорема I.I. Существует кривая с любой наперед заданной формулой. Любой изоморфизм (в очевидном смысле) формул реализуется жесткой изотопией кривых.

Замечание I.I. Из определения следует, что кривая с данной формулой неприводима тогда и только тогда, когда ни одна из кратностей не отмечена. В этом случае формула, а следовательно,

и жесткий изотопический тип кривой определяются топологическим типом ее особой точки.

Доказательство теоремы I.I. Первое утверждение теоремы следует из существования многочленов с любыми наперед заданными кратностями корней, второе - из неприводимости пространства таких многочленов.

I.2. Кривые с особой точкой кратности $\text{deg } C - 2$

Пусть кривая C степени m имеет особую точку O кратности $m - 2$ (и не имеет кратных компонент). Пусть эта точка имеет координаты $(1 : 0 : 0)$. Тогда уравнение кривой представимо в виде $x_0^2 A(x_1, x_2) + x_0 B(x_1, x_2) + C(x_1, x_2) = 0$, где A , B и C - однородные многочлены степеней $m - 2$, $m - 1$ и m соответственно. Пусть $D = B^2 - 4AC$ - дискриминант этого квадратного трехчлена ($\text{deg } D = 2m - 2$). Рассмотрим все корни $O_i \in E x_0$ ($i = 1, \dots, d$) многочленов A и D , поставим в соответствие каждому из корней пару его кратностей $p_i = v_A(O_i)$ и $q_i = v_D(O_i)$, и назовем пару типом корня O_i . Если общий корень многочленов A и D является также (простым) корнем многочлена C , то уменьшением p_i на 1, q_i на 2, отметим эту пару и назовем ее приведенным типом точки O_i . (В этом случае прямая (OO_i) является компонентой кривой C , а уменьшенные кратности соответствуют кривой, полученной из C удалением этой компоненты). Из выражения для D следует, что если пара (p_i, q_i) является приведенным типом, и $p_i \neq q_i$, то меньшее из этих чисел должно быть четно. Такие пары будем называть допустимыми. Пусть \bar{C} - кривая, полученная из C удалением всех компонент вида $L_i = (OO_i)$. Имеется очевидное соответствие между приведенными типами (p_i, q_i) и особыми точками кривой \bar{C} (см. рис. I.I). Из

рис. I.I. д видно, что если прямая L_i не является компонентой кривой C , то точка O_i типа (I.I) может без изменения топологии кривой распасться на пару точек типов (I,0) и (0,I). Поэтому заменим каждую неотмеченную пару (I, I) на две пары (I, 0) и (0, I).

Назовем формулой кривой C набор пар (ρ_i, q_i) - приведенных типов корней, обогащенный следующими структурами: некоторые из пар отмечены, и, если все q_i четны, то пары (ρ_i, q_i) с $\rho_i > q_i$ разбиты на два класса. Это разбиение возникает следующим образом: если все q_i четны, то сужение $\rho \nu|_{\bar{C}}$ естественной проекции $\rho \nu: \mathbb{C}P^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ является тривиальным двулистным разветвленным накрытием, и, следовательно, кривая \bar{C} распадается на две компоненты \bar{C}_1 и \bar{C}_2 . Пару (ρ_i, q_i) отнесем к одному из двух классов в зависимости от того, какая из двух компонент имеет в точке O_i больший локальный индекс пересечения с $E x_0$ (см. рис. I.I. г,е).

Из построения видно, что формула является топологическим инвариантом кривой. Она несет информацию о ее степени, наборе особенностей и расположении особых точек относительно компонент кривой. Если кривая неприводима, то формула и набор особенностей взаимно определяют друг друга.

Изоморфизмом формул назовем биекцию между множествами пар, сохраняющую дополнительные структуры.

Теорема I.2. Формула соответствует некоторой кривой C , если и только если все ее пары допустимы и $\sum q_i = 2 \sum \rho_i + 2$. Кривая C неприводима, если все пары формулы не отмечены, и среди чисел q_i хотя бы одно нечетно. Любой изоморфизм формул двух кривых реализуется жесткой изотопией этих кривых.

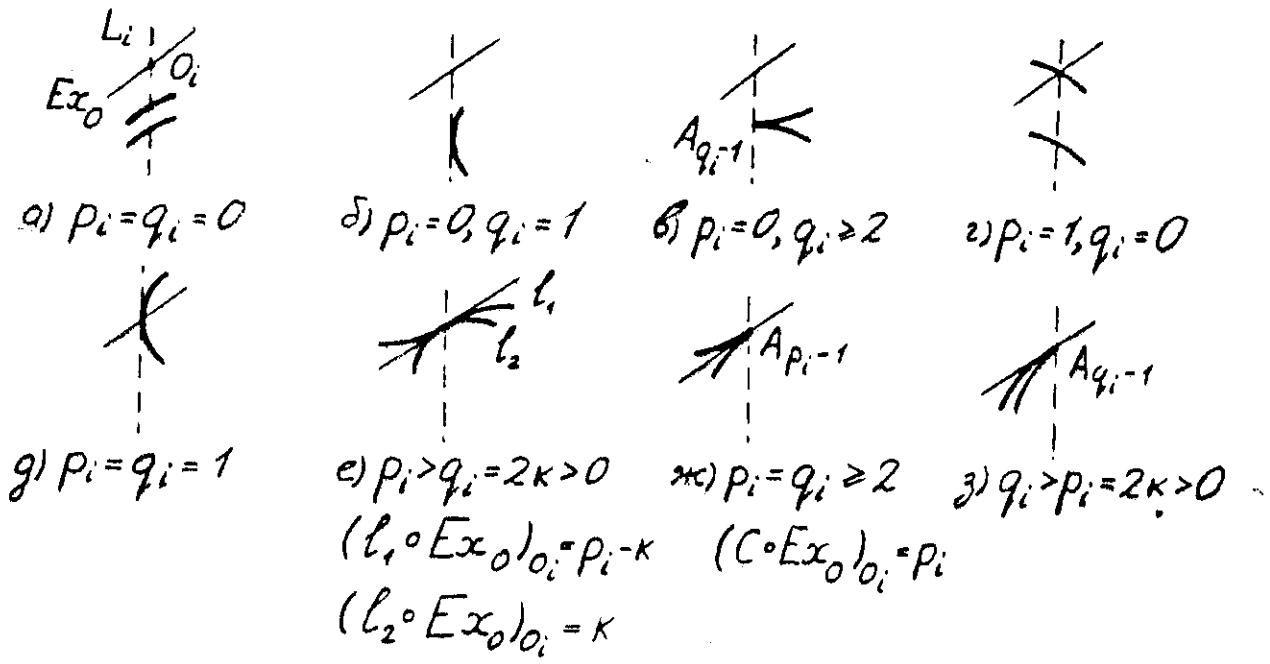


рис. 1.1.

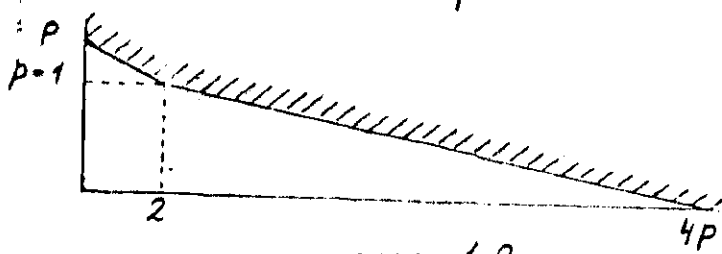


рис. 1.2.

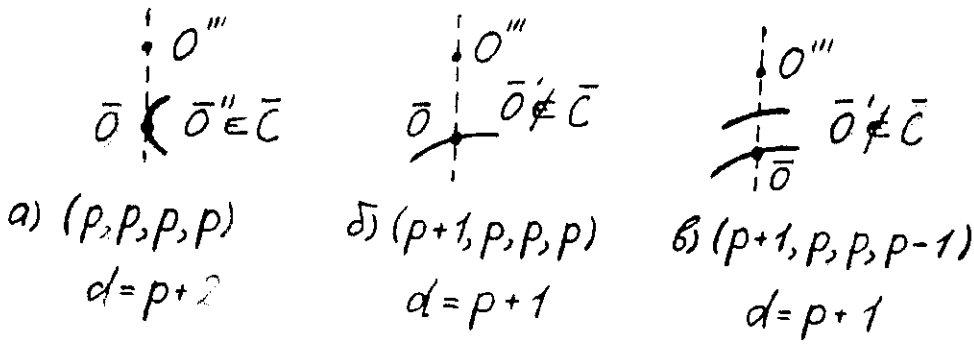


рис. 1.3. $m = 2p + 1$

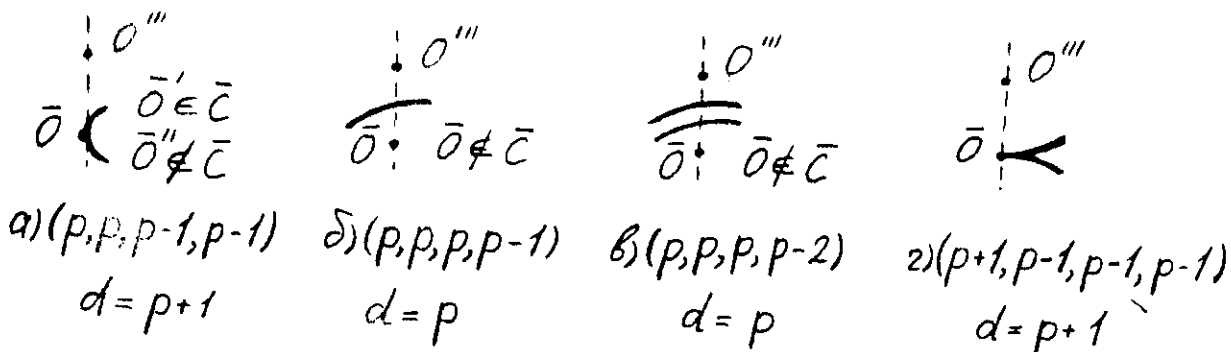


рис. 1.4. $m = 2p$

Замечание I.2. Как показывают примеры кривых пятой степени, условия, налагаемые теоремой I.2 на набор особенностей неприводимой кривой, сильнее ограничений на род (теорема I.2).

Замечание I.3. Теоремы I.1 и I.2 дают, очевидно, полную классификацию кривых четвертой степени.

Замечание I.4. Утверждения, аналогичные теоремам I.1 и I.2, могут быть сформулированы и для вещественных кривых. При этом необходимо следить за вещественностью корней и за их взаимным расположением в $\mathbb{R}p^1$.

Замечание I.5. Теоремы I.1 и I.2 не допускают дальнейшего обобщения (на кривые с особой точкой кратности $\deg C - 3$ и ниже). См. гл. III, п. 6.6.4.

Доказательство теоремы I.2.

1. Необходимость условий реализуемости формулы и необходимость и достаточность условий неприводимости кривой очевидны.

2. Остальные утверждения достаточно доказать для кривых, полученных удалением всех линейных компонент, проходящих через точку 0 (и для формул, полученных игнорированием отмеченности пар).

3. Пусть A и D - многочлены степеней $m-2$ и $2m-2$, и $0_i(x_1^i : x_2^i)$ - все их корни. Пусть при любом i пара $(\nu_A(0_i), \nu_D(0_i))$ допустима. Докажем, что существуют такие многочлены

B и C степеней $m-1$ и m , что $D = B^2 - 4AC$. Пусть

$$\nu_i = \left[\frac{1}{2} \min \{ \nu_A(0_i), \nu_D(0_i) \} \right] \text{ и } X(x_1, x_2) = \prod (x_1 x_2^i - x_2 x_1^i)^{\nu_i}.$$

Тогда многочлены представимы в виде $A = X^2 \bar{A}, D = X^2 \bar{D}, B = X \bar{B}$.

Ниже описаны условия, которые необходимо наложить на многочлен \bar{B} , чтобы многочлен $\bar{D} - \bar{B}^2$ делился на \bar{A} . Если $\nu_A(0_i) = 1$,

— то единственное условие — $\bar{B}(0_i) = b_i = \sqrt{\bar{D}(0_i)}$. Если

$\nu_A(0_i) \geq 2$, то $\bar{B}(0_i) = b_i = \sqrt{\bar{D}(0_i)} \neq 0$, и, дифференцируя многочлен $\bar{D} - \bar{B}^2$ в точке 0_i , последовательно находим значения $\bar{B}^{(k)}(0_i)$ при $k = 1, \dots, \nu_A(0_i) - 1$. Таким образом, на многочлен \bar{B} наложено $\deg \bar{A}$ линейно независимых условий, и, так как $\deg \bar{B} > \deg \bar{A}$, такие многочлены составляют объединение непустых аффинных подпространств, каждое из которых отвечает одному из выборов знаков чисел b_i . Многочлен C однозначно определяется как частное $(\bar{D} - \bar{B}^2) / \bar{A}$.

Легко проверить, что для почти всех пар (B, C) многочлены A, B и C не имеют общих корней, так как если 0_i — общий корень многочленов A и B (или, что равносильно, многочленов A и D), то условие $C(0_i) = 0$ налагает на \bar{B} дополнительное условие, не зависящее от остальных.

4. Из доказанного следует достаточность условий реализуемости формулы без учета возможного разбиения пар на классы. Кроме того, при доказательстве изотопности можно считать, что корни многочленов A_1, D_1 и A_2, D_2 , соответствующих двум кривым, уже совмещены в соответствии с изоморфизмом формул.

5. Если кривые неприводимы, то для завершения доказательства изотопности достаточно заметить, что многочлен D имеет корень 0_i нечетной кратности, и, следовательно, знак любого из b_i можно поменять, обнося корень 0_i вокруг 0_i .

6. Пусть многочлен D не имеет корней нечетной кратности. Можно считать, что многочлены A и D и все их корни вещественны, корни 0_i многочлена A , для которых $\nu_A(0_i) > \nu_D(0_i)$, не разделены остальными корнями многочленов A и D , и во всех таких точках $\bar{D}(0_i) > 0$. (Именно в этих точках 0_i необходимо

выбирать знак значения $b_i = \bar{B}(0_i)$. Тогда многочлены B и C также могут быть выбраны вещественными. В этой ситуации легко проверить, что замена знака числа b_i ведет к замене ветви кривой, имеющей в точке 0_i большой индекс пересечения с $E\alpha_0$. Поэтому тождественное отображение формул кривых, получающихся при разном выборе знаков $\{b'_i\}$ и $\{b''_i\}$, является изоморфизмом тогда и только тогда, когда либо $b'_i = b''_i$ (при любом i), либо $b'_i = -b''_i$, а в этих двух случаях кривые жестко изотопны. Кроме того, подбирая знаки чисел b_i , можно реализовать любую формулу (т.е. любое разбиение пар на классы).

1.3. Некоторые другие случаи

Теорема 1.3. Изотопический тип неприводимой кривой C нечетной степени $m = 2\rho + 1$, имеющий особую точку 0 , примыкающую к полуквазиоднородной особенности типа $(\rho, 4\rho)$, определяется набором особых точек кривой.

Теорема 1.4. Изотопический тип неприводимой кривой C четной степени $m = 2\rho$, имеющей особую точку 0 , многоугольник Ньютона которой в некоторой системе координат содержится в многоугольнике, изображенном на рис. 1.2, определяется набором особых точек кривой.

Замечание 1.6. Доказательство сводит теоремы 1.3 и 1.4 к теоремам 1.1 и 1.2. Это дает также необходимые и достаточные условия существования кривых с заданным набором особенностей. Кроме того, аналогичные утверждения могут быть сформулированы и доказаны для приводимых кривых.

Доказательство теорем 1.3 и 1.4. Из условия следует, что существует коника K , локальный индекс пересечения которой с кривой C в точке 0 не меньше, чем $2m - 2$. Пусть $0 \leftarrow 0' \leftarrow 0'' \leftarrow 0'''$

— бесконечно близкие точки, лежащие на K , и $K^{(i)}$ — кратность кривой C в точке $O^{(i)}$. Очевидно, что $k \geq k' \geq k'' \geq k'''$, $k + k' \leq m$, и $k + k' + k'' + k''' \leq 2m$.

Преобразование $T(0, 0', 0'')$ дает кривую \bar{C} с особой точкой O''' кратности k''' , удовлетворяющую условиям теоремы I.1 или I.2. Обратное преобразование задается такой тройкой $\bar{0} \leftarrow \bar{0}' \leftarrow \bar{0}''$, что $(\bar{0}\bar{0}') \equiv O'''$. На рис. I.3 и I.4 перечислены возможные наборы кратностей (k, k', k'', k''') , и указаны степень d кривой \bar{C} и расположение относительно нее точек $\bar{0}, \bar{0}', \bar{0}''$. В каждом случае из теоремы I.1 или I.2 следует, что наборы $(\bar{C}, \bar{0}, \bar{0}', \bar{0}'')$ образуют неприводимое многообразие.

§ 2. Неприводимые кривые пятой степени

2.1. Основные формулировки

Теорема 2.1. Не существует неприводимых кривых пятой степени со следующими наборами особенностей:

- | | | |
|-----------------------|----------------------|------------------|
| 1) $6A_2$ | 7) $A_6 + A_4 + A_2$ | 13) $E_6 + 3A_2$ |
| 2) $5A_2 + A_1$ | 8) $A_6 + A_3 + A_2$ | 14) $D_5 + 3A_2$ |
| 3) $A_4 + 4A_2$ | 9) $2A_6$ | 15) $D_4 + 3A_2$ |
| 4) $2A_4 + 2A_2$ | 10) $A_8 + 2A_2$ | 16) $E_8 + 2A_2$ |
| 5) $A_4 + A_3 + 2A_2$ | 11) $A_7 + 2A_2$ | 17) $D_7 + 2A_2$ |
| 6) $2A_3 + 2A_2$ | 12) $A_{10} + A_2$ | |

Теорема 2.2. Существуют кривые пятой степени с любыми наборами особенностей, допустимыми ограничением на род (сумма родов особых точек не превосходит 6), за исключением перечисленных в теореме 2.1. Любые две неприводимые кривые пятой степени с одинаковыми наборами особенностей жестко изотопны.

Таким образом, существует 214 изотопических типов неприводимых кривых пятой степени.

Замечание 2.1. Несуществование кривых с наборами особенностей 7 - 12, 16 и 17 доказано в вещественном случае в [10,11]. Там же доказано существование кривых со всеми не более, чем трехточечными наборами особенностей.

Замечание 2.2. Из доказательства теоремы 2.2 следует, что если кривые типов $C_5(A_6 + 3A_2)$ и $C_5(A_3 + 4A_2)$ вещественны, то две их точки возврата - мнимые. Это вытекает из того, что если вещественная кривая типа $C_4(3A_2)$ (двойственная кривой типа $C_3(A_1)$) имеет двойную касательную с вещественными точками касания, то две ее точки возврата - мнимые.

2.2. Доказательство теоремы 2.1.

1. Несуществование кривых с наборами особенностей 13 - 17 следует из теоремы 1.1. Несуществование кривых с наборами особенностей 10 - 12 следует из теоремы 1.3 с учетом замечания 1.6. Если существуют кривые с наборами особенностей 1 - 3, то их класс равен 2 или 3, что невозможно.

2. Пусть существуют кривые с наборами особенностей 4 - 6. Преобразование $T(0, 0', 0_1)$, где 0_1 - одна из точек A_2 , а пара $0 \leftarrow 0'$ определяется одной из точек A_3 или A_4 , дает кривые типа $C_4(A_3 + A_2)$ или $C_4(A_4 + A_2)$, имеющие двойную (в частном случае - 3-кратную) касательную - прямую $(\bar{0} \bar{0}')$, где $\bar{0} \leftarrow \bar{0}'$, $\bar{0}_1$ - точки, задающие обратное преобразование. Это невозможно в силу предложений 3.1 и 3.2.

3. Аналогично, пусть существуют кривые с наборами особенностей 7 - 9. Преобразование $T(0, 0', 0'')$, где тройка $0 \leftarrow 0' \leftarrow 0''$ определяется одной из точек A_6 , дает кривые типов $C_4(A_4 + A_2)$,

$C_4(A_3 + A_2)$ и $C_4(A_6)$, имеющие двойную касательную - прямую $(\bar{0} \bar{0}')$, где $\bar{0} \leftarrow \bar{0}' \leftarrow \bar{0}''$ - тройка, задающая обратное преобразование. Это невозможно в силу предложения 3.2.

2.3. Доказательство теоремы 2.2.

1. Если набор особенностей содержит точку кратности 3 или 4 или точку типа A_ρ с $\rho \geq 7$, то оба утверждения следуют из теорем I.1, I.2 и I.3.

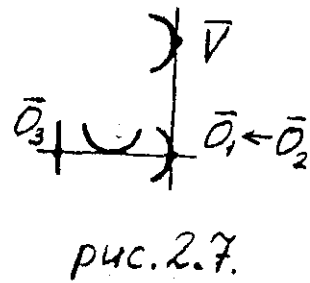
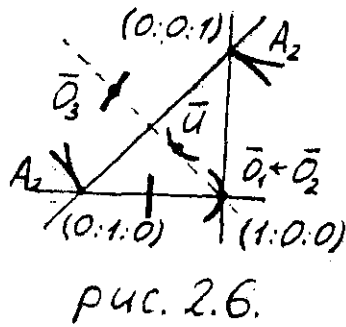
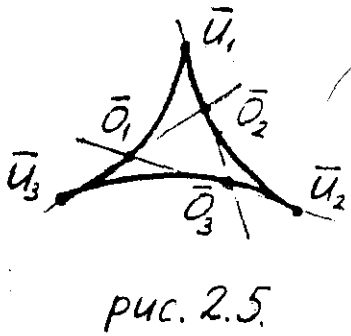
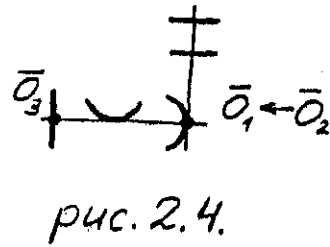
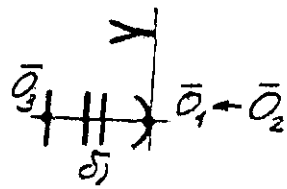
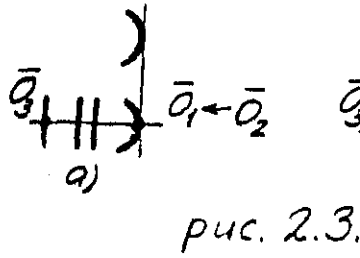
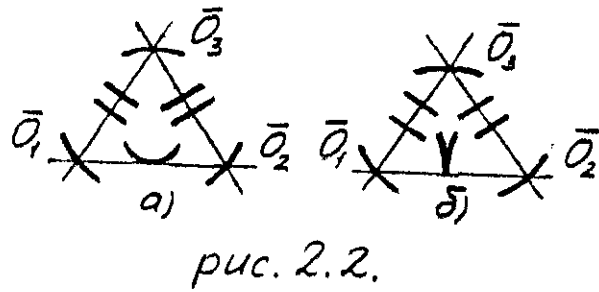
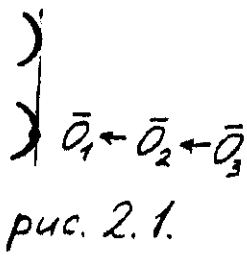
Схема рассуждений в пунктах 2 - 10 одна и та же. На кривой специальным образом выбирается тройка точек O_1, O_2, O_3 . Преобразование $T(O_1, O_2, O_3)$ дает кривую \bar{C} степени 4, на которой лежат (возможно, специальным образом) задающие обратное преобразование точки $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$. Если эта тройка точек - общего положения, то жесткая изотопность наборов $(\bar{C}, \bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3)$ очевидна, в остальных случаях она доказывается отдельно.

2. Набор особенностей содержит точку типа A_5 , определяющую тройку $O_1 \leftarrow O_2 \leftarrow O_3$. Тройка $\bar{O}_1 \leftarrow \bar{O}_2 \leftarrow \bar{O}_3$ - общего положения.

3. Набор особенностей содержит точку типа A_6 , определяющую тройку $O_1 \leftarrow O_2 \leftarrow O_3$. Прямая $(\bar{O}_1 \bar{O}_2)$ должна быть двойной касательной к \bar{C} (рис 2.1). Изотопность следует из предложения 3.2.

4. Набор особенностей содержит две точки O_1 и O_2 типа A_1 и еще хотя бы одну точку O_3 типа A_ρ . При $\rho = 1$ тройка $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$ - общего положения, при $\rho = 2$ или $\rho \geq 3$ прямая $(\bar{O}_1 \bar{O}_2)$ должна, соответственно, касаться кривой \bar{C} (рис. 2.2 а) или проходить через ее особую точку типа $A_{\rho-2}$ (рис. 2.2 б). Изотопность во всех трех случаях очевидна.

5. Набор особенностей содержит точку типа A_3 , определяющую пару $O_1 \leftarrow O_2$, и еще хотя бы одну точку O_3 типа A_ρ . При $\rho = 1$ набор $\bar{O}_1 \leftarrow \bar{O}_2, \bar{O}_3$ - общего положения, при $\rho = 2$ или



или $\rho \geq 3$ прямая (\bar{O}_1, \bar{O}_2) должна, соответственно, быть двойной (в частном случае - 3-кратной) касательной к \bar{C} (рис. 2.3 а) или проходить через ее особую точку типа $A_{\rho-2}$ (рис 2.3 б). В первом случае изотопность очевидна, во втором следует из предложений 3.1 и 3.2, в третьем - из предложения 3.4.

6. Набор особенностей содержит точку типа A_4 , определяющую пару $O_1 \leftarrow O_2$, и точку O_3 типа A_1 . Тогда точки $\bar{O}_1 \leftarrow \bar{O}_2$ - бесконечно близкие, и прямая (\bar{O}_1, \bar{O}_3) касается \bar{C} в точке $\bar{u} \neq \bar{O}_1, \bar{O}_3$ (рис. 2.4). Следовательно, набор точек $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$ определяется заданием общей точки $\bar{u} \in \bar{C}$ и выбором в качестве \bar{O}_1 одной из точек \bar{V}_1, \bar{V}_2 пересечения кривой \bar{C} и касательной к ней в точке \bar{u} . Так как в силу предложений 3.2 и 3.4 в каждом изотопическом классе кривых четвертой степени существует кривая, имеющая либо двойную касательную, либо касательную из точки типа A_ρ с нечетным ρ , то точки \bar{V}_1 и \bar{V}_2 можно поменять местами, обходя \bar{u} вдоль некоторой петли на кривой \bar{C} .

7. Пусть набор особенностей состоит из трех точек O_1, O_2, O_3 типа A_4 . Тогда кривая \bar{C} имеет тип $C_4(3A_2)$. Пусть $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ - ее особые точки. Тогда $(\bar{O}_1, \bar{O}_2) \cong \bar{u}_3, (\bar{O}_1, \bar{O}_3) \cong \bar{u}_2, (\bar{O}_2, \bar{O}_3) \cong \bar{u}_1$ (см. рис. 2.5, заимствованный из [II]). Рассмотрим отображение $\mathcal{Y}_i : \bar{C} \rightarrow \bar{C}$, ставящее в соответствие точке $\bar{V} \in \bar{C}$ вторую точку пересечения $\bar{C} \cap (\bar{V}, \bar{u}_i)$. Тогда \bar{O}_1 - неподвижная точка отображения $\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_3$, и $\bar{O}_2 = \mathcal{Y}_3(\bar{O}_1), \bar{O}_3 = \mathcal{Y}_1(\bar{O}_2)$. Так как $\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_3$ - нетождественный биголоморфизм рациональной кривой \bar{C} , то он имеет ровно две неподвижных точки, и, следовательно, на фиксированной кривой \bar{C} существует ровно два набора $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$. Легко проверить, что проективное преобразование, переводящее кривую \bar{C} в себя и переставляющее ее

особые точки \bar{u}_2 и \bar{u}_3 , меняет эти наборы местами.

8. Рассмотрим набор особенностей $2A_4 + A_2$. Пусть пара $0_1 \leftarrow 0_2$ определяется одной из точек типа A_4 , а 0_3 - вторая такая точка. Тогда кривая \bar{C} имеет тип $C_4(2A_2)$, точки $\bar{0}_1 \leftarrow \bar{0}_2$ - бесконечно близкие, прямая $(\bar{0}_1 \bar{0}_3)$ касается \bar{C} в точке $\bar{u} \in \bar{C}$, а прямая $(\bar{0}_1 \bar{0}_2)$ проходит через одну из точек возврата (рис. 2.6). Изотопность таких наборов легко установить, рассмотрев уравнение кривой в системе координат, в которой точки возврата и точки $\bar{0}_1$ и \bar{u} имеют, соответственно, координаты $(0 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 0)$ и $(1 : 1 : 1)$. Многоугольник Ньютона кривой \bar{C} изображен на рис. 2.8. Кроме того, должны быть выполнены условия: $a_{21}^2 = 4 a_{20} a_{22}$, $a_{12}^2 = 4 a_{02} a_{22}$ (обеспечивает наличие точек возврата), $\sum a_{ij} = 0$ (кривая проходит через точку \bar{u}), и $\sum (i+j) a_{ij} = 0$ (касательная в точке \bar{u} проходит через $\bar{0}_1$). Легко видеть, что такие наборы коэффициентов образуют неприводимое многообразие.

9. Рассмотрим набор особенностей $A_4 + 2A_2$. Пара $0_1 \leftarrow 0_2$ определяется точкой A_4 , а 0_3 - одна из точек типа A_2 . Кривая \bar{C} имеет тип $C_4(A_2)$, расположение точек $\bar{0}_1 \leftarrow \bar{0}_2$, $\bar{0}_3$ показано на рис. 2.7. Пусть точка возврата \bar{v} и точки $\bar{0}_1$, \bar{v} , \bar{u} имеют, соответственно, координаты $(0 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и $(1 : 1 : 1)$. Многоугольник Ньютона кривой изображен на рис. 2.9. Кроме того, должны быть выполнены соотношения $a_{21}^2 = 4 a_{20} a_{22}$ (точка возврата), $\sum a_{ij} = \sum (i+j) a_{ij} = 0$ (касательная в точке \bar{u} проходит через $\bar{0}_1$). Легко видеть, что удовлетворяющие этим условиям наборы коэффициентов образуют неприводимое многообразие.

10. Рассмотрим набор особенностей $A_4 + 3A_2$. Точки

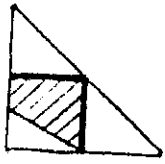


рис. 2.8.

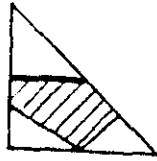


рис. 2.9.

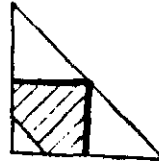


рис. 2.10.

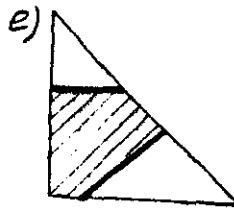
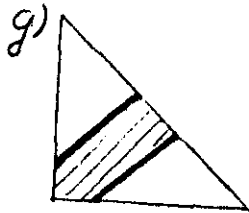
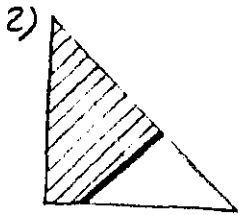
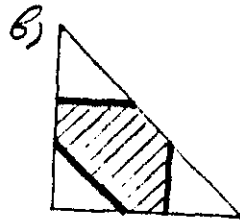
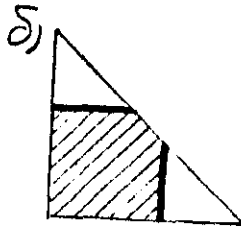
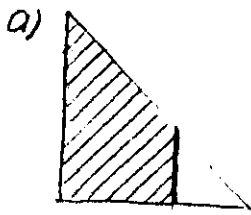


рис. 2.11.

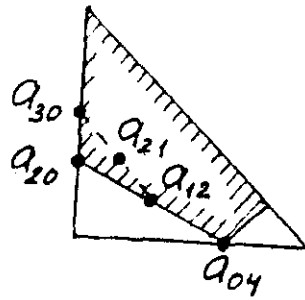


рис. 2.12.

$O_1 \leftarrow O_2, O_3$ - такие же, как и в пункте 9. Кривая \bar{C} имеет тип $C_4(2A_2)$, и точки $\bar{O}_1 \leftarrow \bar{O}_2, \bar{O}_3$ расположены так же, как и в пункте 9 (рис. 2.9). Пусть точки возврата и точки \bar{O}_1 и \bar{u} имеют, соответственно, координаты $(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 0 : 0)$ и $(1 : 1 : 1)$. Многоугольник Ньютона кривой \bar{C} изображен на рис. 2.10. Кроме того, должны быть выполнены условия:

$$1) 4a_{20}a_{22} = a_{21}^2, \quad 4a_{02}a_{22} = a_{12}^2 \quad (\text{точки возврата});$$

2) $a_{21}a_{12} = 2a_{11}a_{22}$ (двойная касательная проходит через точку \bar{O}_1 ; получается с учетом многоугольника Ньютона и условий (1));

3) $\sum a_{ij} = \sum (i+j)a_{ij} = 0$ (касательная в точке \bar{u} проходит через \bar{O}_1).

Таким образом, a_{20}, a_{11}, a_{02} и $(a_{10} + a_{01})$ выражаются через a_{21}, a_{12} и a_{22} . С учетом этого из (3) находим $a_{21} + a_{12} + 6a_{22} = 0$ или $a_{21} + a_{12} + 2a_{22} = 0$. Последнее решение следует отбросить, так как в этом случае из (3) следует, что $a_{10} + a_{01} = 0$, и, следовательно, через точку \bar{u} проходит двойная (а не простая) касательная. Таким образом, наборы коэффициентов образуют неприводимое многообразие.

II. Пусть набор особенностей состоит из не более, чем трех точек типа A_1 или A_2 , или из не более чем двух точек типа A_1, A_2, A_3 или A_4 . Тогда для доказательства всех утверждений достаточно рассмотреть уравнение кривой в системе координат, привязанной к ее особым точкам. Многоугольник Ньютона кривой должен быть одним из изображенных на рис. 2.11, и, кроме того,

некоторые из квадратичных форм, составленных из стоящих на выделенных гранях коэффициентов, должны быть вырождены (это обеспечивает наличие точки типа A_2 или A_4). Такие коэффициентные наборы образуют неприводимые многообразия.

12. Рассмотрим набор особенностей $3A_2 + A_1$. Пусть точки возврата и точка типа A_1 имеют, соответственно, координаты $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и $(1 : 1 : 1)$. Многоугольник Ньютона кривой изображен на рис. 2. II в, все три квадратичные формы должны быть вырождены, и коэффициенты a_{21} , a_{22} и a_{12} линейно выражаются через остальные (вытекает из наличия точки A_1). Такие наборы коэффициентов образуют неприводимое многообразие.

13. Остались не рассмотрены наборы особенностей $5A_2$, $4A_2 + A_1$ и $4A_2$. Существование кривых типа $C_5(5A_2)$ доказано в [12]. Из этого следует существование кривых типов $C_5(4A_2 + A_1)$ и $C_5(4A_2)$. Докажем их изотопность.

Пусть C — кривая, имеющая один из этих наборов особенностей. Существует неприводимая коника K_1 , проходящая через все особые точки кривой C . В случае $4A_2$ потребуем дополнительно, чтобы K_1 касалась кривой C в несобойной точке O . (В существовании такой коники легко убедиться, выполнив треугольное преобразование с центрами в любых трех особых точках кривой). В случае $4A_2 + A_1$ обозначим через O точку типа A_1 , в случае $5A_2$ — одну из точек возврата. Пусть L — касательная к K_1 в точке O . Рассмотрим кривую шестой степени $\Phi_6 = \{f_C \cdot f_L = 0\}$ (где через f_Φ обозначен многочлен, задающий кривую Φ). Эта кривая имеет четыре точки возврата (там же, где и кривая C), особенность, примыкающую к A_3 (A_3 , D_4 или D_5) в точке O , и еще несколько двойных точек. Пусть F — кубика, проходящая

через все особые точки кривой C , касающаяся L в точке O , и касающаяся C в некоторых трех точках возврата, отличных от O .

Докажем, что существует такая коника K , что $f_{\Phi_6} = f_{K_1}^2 f_{K_2} - f_C^2$. Так как сужения $f_{\Phi_6}|_{K_1}$ и $f_F|_{K_1}$ пропорциональны, то при подходящем выборе множителя при f_F многочлен $f_{\Phi_6} + f_F^2$ делится на f_{K_1} . Пусть $f_{\Phi_6} + f_F^2 = f_{K_1} \cdot f_{\Phi_4}$. Разрешая особенности, легко установить, что $(\Phi_4 \circ K_1)_O \geq 2$, $(\Phi_4 \circ K_1)_{A_2} \geq 2$, если F касается C в этой точке, и $(\Phi_4 \circ K_1)_{A_2} \geq 1$ в противном случае (см. доказательство в п. 6.3 главы III). Поэтому $\Phi_4 \circ K_1 \geq 9$, и, следовательно, Φ_4 содержит K_1 в качестве компоненты, что и требовалось. Коника K_2 должна проходить через все точки возврата кривой C , отличные от O (см. гл. III, п. 6.3).

Имеется следующее необходимое условие распада кривой $\Phi_6: K_2$ должна касаться L в некоторой точке $M \neq O$, и F должна проходить через эту точку (так как сужения $f_F|_L$ и $f_{K_1}^2 \cdot f_{K_2}|_L$ должны быть равны).

Пусть точки O и M имеют, соответственно, координаты $(1 : 0 : 0)$ и $(0 : 0 : 1)$. Фиксируем коники K_1 и K_2 . Тогда кубика F должна проходить через точку M , касаться L в точке O и проходить через все точки пересечения $K_1 \cap K_2$. Кубики, удовлетворяющие этим условиям, образуют линейную систему размерности 2, и могут быть заданы уравнением вида $f_F = \omega_0 x_0 f_{K_1} + \omega_2 x_1 f_{K_1} + \omega_3 x_1 f_{K_2} = 0$. Выполнение этих условий гарантирует, что кривая $\Phi_6 = \{f_{K_1}^2 f_{K_2} - f_F^2 = 0\}$ будет иметь особенности типа A_2 в точках пересечения $K_1 \cap K_2$, особенность, примыкающую к A_3 с касательной L в точке O , и касаться прямой L в точке M . Многоугольник Ньютона этой кривой изображен на рис. 2.12.

Пусть ρ_{ij} и q_{ij} - коэффициенты уравнений коник K_1 и K_2 , $\rho_{02} \neq 0$, $q_{00} \neq 0$. Выразим через них и через параметры $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ некоторые коэффициенты многочлена f_{Φ_6} :

$$a_{04} = \rho_{02}^2 (q_{00} - \omega_1^2),$$

$$a_{20} = \rho_{10}^2 (q_{00} - \omega_1^2) - \omega_3 q_{00} (2\omega_1 \rho_{10} + \omega_3 q_{00}),$$

$$a_{30} = \rho_{10}^2 q_{10} + 2\rho_{10} \rho_{20} q_{00} - 2(\omega_1 \rho_{20} + \omega_2 \rho_{10} + \omega_3 q_{10})(\omega_1 \rho_{10} + \omega_3 q_{00}),$$

$$a_{21} = \rho_{10} \rho_{11} (q_{00} - \omega_1^2) - 2\omega_1 \omega_3 \rho_{11} q_{00},$$

$$a_{12} = 2\rho_{10} \rho_{02} (q_{00} - \omega_1^2) - 2\omega_1 \omega_3 \rho_{02} q_{00}$$

Кривая Φ_6 распадается на C и L (что соответствует набору особенностей $4A_2$), если $a_{04} = 0$, откуда находим

$\omega_1 = \pm \sqrt{q_{00}}$. Так как одновременное изменение знаков всех ω_i не влияет на многочлен f_{Φ_6} , то можно выбрать и зафиксировать одно из двух значений.

Кривая C имеет в точке O особенность, примыкающую к K_1 (набор особенностей $4A_2 + A_1$), если $a_{20} = 0$, откуда $\omega_3 = 0$ или $\omega_3 = -2\omega_1 \rho_{10} / q_{00}$. Значение $\omega_3 = 0$ следует отбросить, так как в этом случае C содержит K_1 в качестве компоненты.

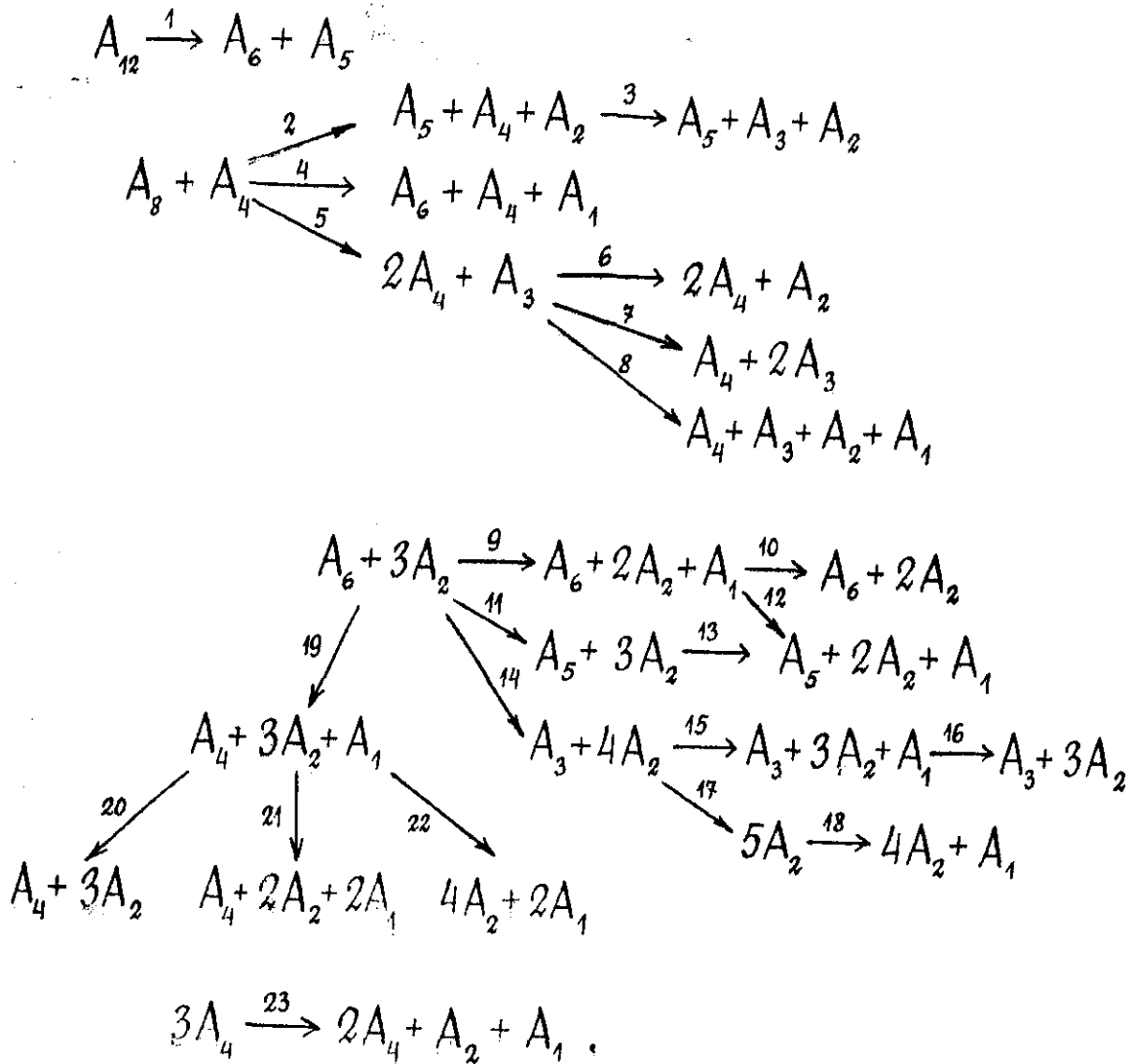
Наконец, кривая C имеет в точке O особенность, примыкающую к A_2 (набор особенностей $5A_2$), если $a_{21}^2 = 4a_{30}a_{12}$. Это соотношение линейно по ω_2 , и, следовательно, определяет его однозначно.

Таким образом, во всех трех случаях наборы параметров, определяющих кривые, образуют неприводимое многообразие.

2.4. Некоторые примыкания

Ниже перечислены те примыкания неприводимых кривых пятой

степени, которые используются в гл. II при вычислении фундаментальных групп:



Доказательство. Легко видеть, что кривая типа $C_5(A_3 + 4A_2)$ может быть получена таким же образом, как и $C_5(5A_2)$ и $C_5(4A_2 + A_1)$ (см. пункт 13 доказательства теоремы 2.2). Из этого следует наличие примыканий I7 и I8.

При построении остальных примыканий схема рассуждений одинакова. Кривые пятой степени C' и C'' получаются квадратичными преобразованиями одного и того же типа из кривых четвертой степени \bar{C}' и \bar{C}'' . Пусть $\bar{O}_1^{(i)}, \bar{O}_2^{(i)}, \bar{O}_3^{(i)} \in \bar{C}^{(i)}$ - фундаментальные точки этих преобразований. В каждом случае доказано, что набор

$(\bar{C}'' , \bar{O}_1'' , \bar{O}_2'' , \bar{O}_3'')$ можно получить возмущением набора $(\bar{C}' , \bar{O}_1' , \bar{O}_2' , \bar{O}_3')$, т.е. возмущением кривой \bar{C}' или шевелением точек $\bar{O}_1' , \bar{O}_2' , \bar{O}_3'$.

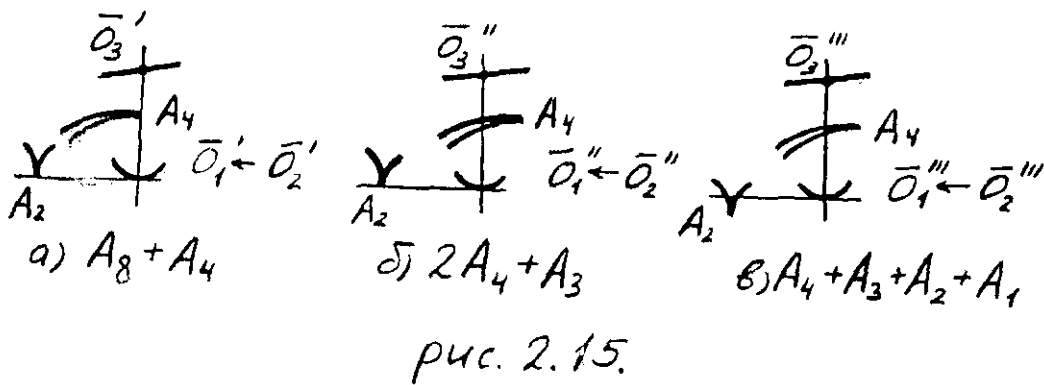
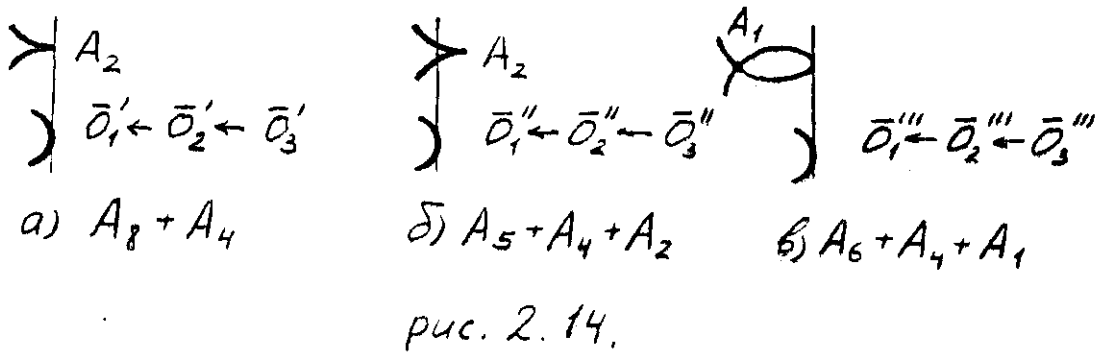
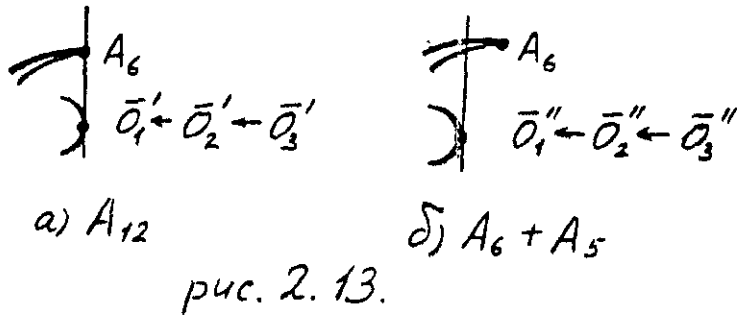
1. Примыкание I. Обе кривые могут быть получены из кривой типа $C_4(A_6)$. Расположение фундаментальных точек $\bar{O}_1^{(i)} \leftarrow \bar{O}_2^{(i)} \leftarrow \bar{O}_3^{(i)}$ показано на рис. 2.13.

2. Примыкания 2, 3, 4. Кривые типов $C_5(A_3 + A_4)$ и $C_5(A_5 + A_4 + A_2)$ получаются из кривой типа $C_4(A_4 + A_2)$ (см. рис. 2.14 а, б). Это реализует примыкание 2. Примыкание 3 реализуется возмущением $C_4(A_4 + A_2) \rightarrow C_4(A_3 + A_2)$ на рис. 2.14 б. Примыкание 4 реализуется возмущением $C_4(A_4 + A_2) \rightarrow C_4(A_4 + A_1)$ на рис. 2.14 а. Прямая $(\bar{O}_1' \bar{O}_2')$ становится двойной касательной (рис. 2.14 в).

3. Примыкания 5, 7, 8. Кривые типов $C_5(A_3 + A_4)$, $C_5(2A_4 + A_3)$ и $C_5(A_4 + A_3 + A_2 + A_1)$ получаются из кривой типа $C_4(A_4 + A_2)$ (рис. 2.15). Это реализует примыкания 5 и 8. Примыкание 7 реализуется возмущением $C_4(A_4 + A_2) \rightarrow C_4(A_3 + A_2)$ на рис. 2.15 б.

4. Примыкание 6 реализуется возмущением $C_4(A_3 + A_2) \rightarrow C_4(2A_2)$ на рис. 2.16.

5. Примыкания 9 - 13. Кривые типов $C_5(A_6 + 3A_2)$ и $C_5(A_5 + 3A_2)$ могут быть получены из кривой типа $C_4(3A_2)$ (рис. 2.17). Это реализует примыкание II. Аналогично реализуется примыкание I2 (кривые получаются из кривой типа $C_4(2A_2 + A_1)$). Примыкания 9 и 10 реализуются возмущениями $C_4(3A_2) \rightarrow C_4(2A_2 + A_1)$ на рис. 2.17 а, примыкание 13 - возмущением $C_4(3A_2) \rightarrow C_4(2A_2 + A_1)$ на рис. 2.17 б.



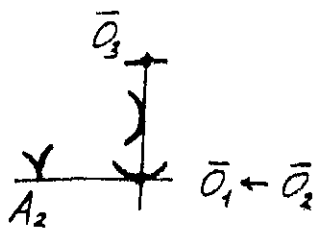
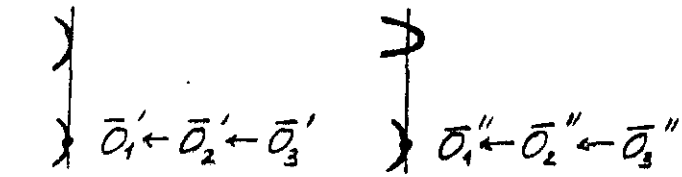


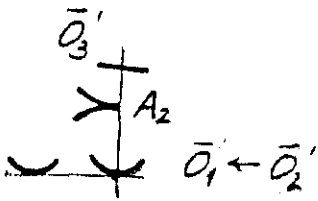
рис. 2.16.



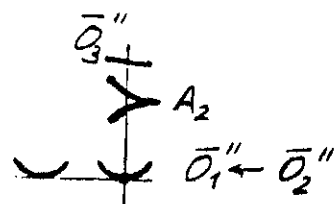
a) $A_6 + 3A_2$

б) $A_5 + 3A_2$

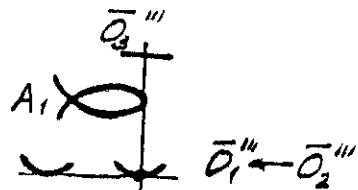
рис. 2.17.



a) $A_6 + 3A_2$

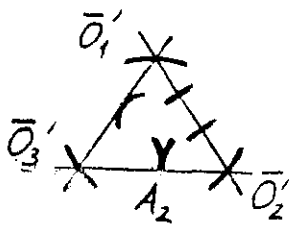


б) $A_3 + 4A_2$

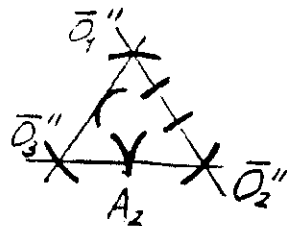


в) $A_4 + 3A_2 + A_1$

рис. 2.18.

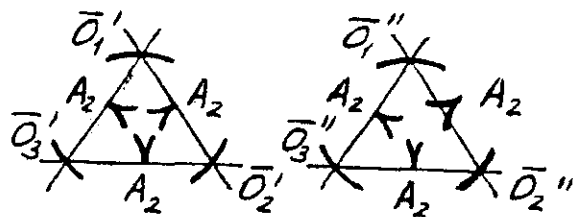


a) $A_4 + 3A_2 + A_1$

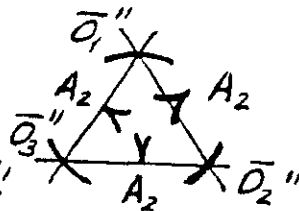


б) $4A_2 + 2A_1$

рис. 2.19.



a) $3A_4$



б) $2A_4 + A_2 + A_1$

рис. 2.20.

6. Примыкания I4, I5, I6, I9, 20. Кривые типов $C_5(A_6 + 3A_2)$ и $C_5(A_3 + 4A_2)$ получаются из кривой типа $C_4(3A_2)$ (рис. 2.18 а, б). Это реализует примыкание I4. Примыкания I5, I6 реализуются возмущениями $C_4(3A_2) \rightarrow C_4(2A_2 + A_1) \rightarrow C_4(2A_2)$ на рис. 2.18 б, примыкание 20 - возмущением $C_4(2A_2 + A_1) \rightarrow C_4(2A_2)$ на рис. 2.18 в. Наконец, примыкание I9 реализуется возмущением $C_4(3A_2) \rightarrow C_4(2A_2 + A_1)$ на рис. 2.18 а. Прямая $(\bar{0}'_1 \bar{0}'_3)$ становится при этом касательной (рис. 2.18 в).

7. Примыкание 22. Кривые получаются из кривой типа $C_4(3A_2)$ (рис. 2.19).

8. Примыкание 23. Кривые получаются из кривой типа $C_4(3A_2)$ (рис. 2.20).

§ 3. Приводимые кривые пятой степени

В этом параграфе доказано, что, как и в неприводимом случае, изотопический тип приводимой кривой пятой степени определяется очевидными инвариантами. Ниже перечислены запреты на взаимное расположение компонент кривой, и доказана изотопность кривых в тех случаях, когда это не очевидно.

3.1. Распадение на кривую четвертой степени и прямую

Предложение 3.1. 1) Кривые четвертой степени с наборами особенностей $3A_2$, $A_3 + A_2$, $A_4 + A_2$ и A_6 не имеют 3-кратных касательных (т.е. прямых, пересекающих эту кривую в неособой точке с кратностью 4).

2) Для любого другого набора особенностей σ существуют кривые типа $C_4(\sigma)$, имеющие 3-кратную касательную.

3) Изотопический тип пары, состоящей из кривой четвертой степени и 3-кратной касательной, определяется набором особенно-

стей кривой.

Предложение 3.2. 1) Кривые четвертой степени с наборами особенностей $A_3 + A_2$, $A_4 + A_2$ и A_6 не имеют двойных касательных.

2) Для любого другого набора особенностей σ общая кривая типа $C_4(\sigma)$ имеет двойную касательную.

3) Изотопический тип пары, состоящей из кривой четвертой степени и двойной касательной, одна из точек касания которой отмечена, определяется набором особенностей кривой.

Предложение 3.3. 1) Кривая типа $C_4(3A_2)$ не имеет точек перегиба.

2) Для любого другого набора особенностей σ общая кривая типа $C_4(\sigma)$ имеет точки перегиба.

3) Изотопический тип кривой четвертой степени с отмеченной точкой перегиба определяется набором особенностей кривой.

Предложение 3.4. 1) Ниже перечислены все неприводимые кривые четвертой степени, не имеющие касательных из одной из особых точек: а) $C_4(3A_2)$ - из любой особой точки; б) $C_4(2A_2 + A_1)$ - из точки типа A_1 ; в) $C_4(A_4 + A_2)$ - из точки типа A_4 ; г) кривые с особой точкой кратности три.

2) Во всех остальных случаях изотопический тип пары, состоящей из кривой четвертой степени и касательной из одной из ее особых точек O , определяется набором особенностей кривой и типом точки O .

Замечание 3.1. Некоторые из перечисленных запретов доказаны в вещественном случае в [10, 11].

Доказательство предложения 3.4. Предложение является очевидным следствием теорем I.1 и I.2.

Доказательство предложений 3.1 - 3.3.

1. Если кривая имеет точку кратности 3, то все утверждения следуют из теоремы 1.2.

2. Если кривая не имеет особенностей или имеет единственную особую точку типа A_1 , A_2 , A_3 или A_4 , то все утверждения легко доказать, рассмотрев уравнение кривой в системе координат, связанной к ее особой точке и выделенной касательной. Влияние на многоугольник Ньютона кривой точки перегиба, 3-кратной или двойной касательной изображено на рис. 3.1 а, б, в соответственно. (В случае двойной касательной (рис. 3.1 в) форма, составленная из стоящих на выделенной грани коэффициентов, должна быть вырождена) Влияние особых точек изображено на рис. 3.2. (В случае точки A_2 или A_4 формы, составленные из стоящих на выделенной грани коэффициентов должны быть вырождены). Легко видеть, что удовлетворяющие всем условиям наборы коэффициентов образуют неприводимое многообразие.

3. Пусть кривая имеет две особые точки типа A_1 или A_2 . Пусть эти точки и выделенная точка касания имеют, соответственно, координаты $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и $(1 : 0 : 0)$, а выделенная касательная - уравнение $x_1 = x_2$. В случае двойной касательной пусть вторая точка касания имеет координаты $(1 : 1 : 1)$. Многоугольник Ньютона кривой изображен на рис. 3.3. Если особая точка имеет тип A_2 , то форма, составленная из стоящих на выделенной грани коэффициентов, должна быть вырождена. Кроме того, должны быть выполнены соотношения:

а) точка перегиба: $a_{10} + a_{01} = a_{20} + a_{11} + a_{02} = 0$;

б) 3-кратная касательная: $a_{10} + a_{01} = a_{20} + a_{11} + a_{02} = a_{21} + a_{12} = 0$;

в) двойная касательная: $a_{10} + a_{01} = 0$, $a_{20} + a_{11} + a_{02} = a_{22}$, $a_{21} + a_{12} = -2a_{22}$.

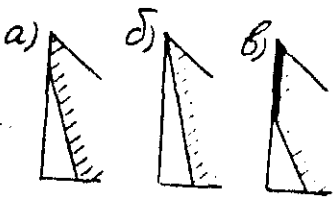


рис. 3.1.

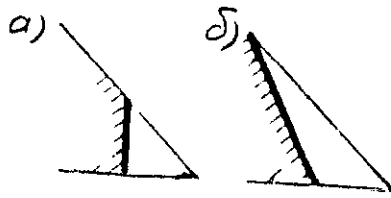


рис. 3.2.

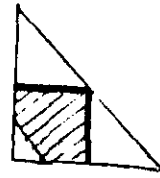
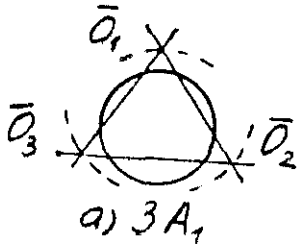
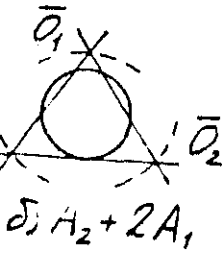


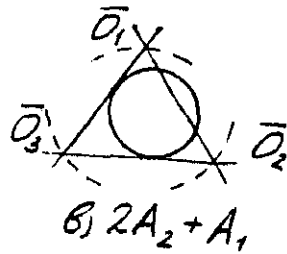
рис. 3.3.



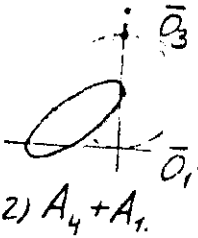
а) $3A_1$



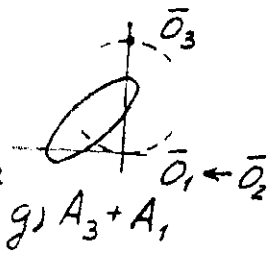
б) $A_2 + 2A_1$



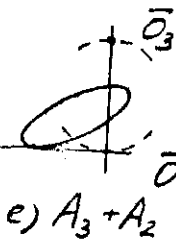
в) $2A_2 + A_1$



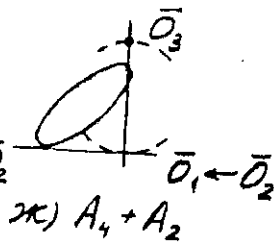
г) $A_4 + A_1$



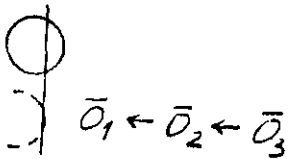
д) $A_3 + A_1$



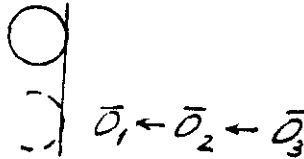
е) $A_3 + A_2$



ж) $A_4 + A_2$

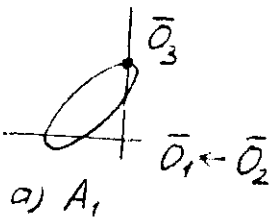


з) A_5

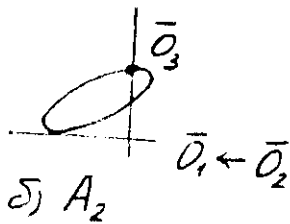


и) A_6

рис. 3.4.



а) A_1



б) A_2

рис. 3.5.

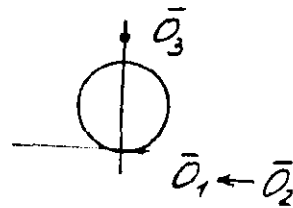


рис. 3.6.

В каждом случае легко проверить, что удовлетворяющие всем условиям наборы коэффициентов образуют неприводимое многообразие (некоторые коэффициенты задаются общим образом, а остальные однозначно через них выражаются).

4. Кривая типа $C_4(3A_2)$ двойственна кривой типа $C_3(A_1)$. Из этого следуют все относящиеся к ней утверждения.

5. Все остальные кривые степени 4 рациональны. Пусть точки O_1, O_2, O_3 определяются особенностями кривой (точки типов A_3, A_4 или A_5, A_6 определяют, соответственно, пару или тройку бесконечно близких точек). Преобразование $T(O_1, O_2, O_3)$ переводит кривую C и выделенную касательную L в коники K_1 и K_2 соответственно. Задающие обратное преобразование точки $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$ лежат на K_2 . Их расположение относительно K_1 показано на рис.

3.4. (K_1 изображена сплошной линией, K_2 - пунктиром). Коники K_1 и K_2 пересекаются так же, как и кривые C и L . В каждом случае наборы $(K_1, K_2, \bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3)$ образуют неприводимое многообразие (это либо очевидно, либо следует из предложения 3.6). Источником всех запретов является предложение 3.6.

3.2. Распадение на неприводимые кубики и конику

Если коника проходит через особую точку кубики, то к кривой применима теорема I.2.

Пусть коника не проходит через особую точку кубики. Будем обозначать такую пару кривых символом вида $C_3(\sigma) + (\rho_1, \dots, \rho_k)$, где $\rho_1 \dots \rho_k$ - кратности их точек пересечения.

Предложение 3.5. 1) Не существует кривых с символами $C_3(A_2) + (2, 2, 2)$, $C_3(A_2) + (2, 4)$, $C_3(A_2) + (6)$.

2) Все остальные символы реализуются. Изотопический тип кривой определяется ее символом.

3) Имеют место примыкания $C_3(\sigma) + (6) \rightarrow C_3(\sigma) + (\rho_1, \dots, \rho_k)$, где $\sigma \neq A_2$, а ρ_1, \dots, ρ_k - любой набор индексов пересечения.

Доказательство.

1. Если кубика неособа, то все утверждения очевидны. Действительно, можно произвольно выбрать конику и шесть точек на ней (возможно, бесконечно близких). Проходящие через эти точки кубики образуют линейную систему размерности три.

2. Если набор индексов пересечения имеет вид $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, то все утверждения также очевидны.

3. Пусть кубика имеет особую точку O_3 , и набор индексов пересечения имеет вид (ρ_1, \dots) , где $\rho_1 \geq 2$. Пусть пара $O_1 \leftarrow O_2$ определяется точкой пересечения кривых, локальный индекс пересечения в которой равен ρ_1 . Преобразование $T(O_1, O_2, O_3)$ переводит кубику и конику в коники K_1 и K_2 соответственно. Локальные индексы пересечения этих коник равны $\rho_1 - 2, \dots$. Расположение задающих обратное преобразование точек $\bar{O}_1 \leftarrow \bar{O}_2, \bar{O}_3$ относительно коники K_1 показано на рис. 3.5, относительно K_2 - на рис. 3.6. В каждом случае легко видеть, что наборы $(K_1, K_2, \bar{O}, \bar{O}, \bar{O})$ образуют неприводимое многообразие, и что набор, соответствующий символу $C_3(A_1) + (\dots)$ получается возмущением набора, соответствующего символу $C_3(A_1) + (6)$.

3.3. Распадение на пару коник и прямую

Предложение 3.6. 1) Две коники K_1 и K_2 касающиеся друг друга в двух точках, или имеющие точку 3-кратного касания, не имеют общих касательных.

2) В остальных случаях изотопический тип набора, состоящего из пары коник и прямой, определяется очевидными инвариантами.

Доказательство. 1) Двойственные к K_1 и K_2 коники пересека-

ются так же, как и K_1 и K_2 . Следовательно, они не имеют простых точек пересечения.

2). Это утверждение очевидно.

ГЛАВА II. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ДОПОЛНЕНИЯ КРИВЫХ
ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Терминология, обозначения

1. Если G - группа, то обозначим через $K(G)$ ее коммутант, и через $K'(G)$ - второй коммутант, $K'(G) = K(K(G))$.

2. Если a, b - элементы группы G , то обозначим через $[a, b]$ их коммутант.

В дальнейшем без специальных оговорок используются следующие очевидные факты:

- если $[a, b] = 1$, то и $[a, a^{p_1} b^q a^{p_2}] = 1$;
- если $[a, b] = [a, c] = 1$, то и $[a, bc] = 1$;
- если $[a, b] = 1$, то и $[u^{-1} a u, u^{-1} b u] = 1$ для любого элемента $u \in G$;
- если $[a, b^{p_1}] = [a, b^{p_2}] = 1$, то и $[a, b^p] = 1$, где $p = \text{g.c.d.}(p_1, p_2)$.

3. Для любого элемента g группы G обозначим через $\text{tr}_g: G \rightarrow G$ внутренний автоморфизм: $\text{tr}_g a = g^{-1} a g$.

4. Фиксируем обозначения для некоторых конкретных групп:

F_p - свободная группа ранга p ;

$T_{p,q}$ - фундаментальная группа торического зацепления типа (p, q) ; если $\text{g.c.d.}(p, q) = 1$, то $T_{p,q} = \langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$;
если $p = 2$, то $T_{2,2q} = \langle a, b \mid (ab)^q = (ba)^q \rangle$, и $T_{2,2q+1} = \langle a, b \mid (ab)^q a = b(ab)^q \rangle$;

B_p - группа кос из p нитей; $B_p = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1} \mid [\sigma_i, \sigma_j] = 1$,
при $|i-j| > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle$; $B_3 = T_{2,3}$.

$G(Q)$ и $G_p(Q)$, где $Q \in \mathbb{Z}[t]$ - расширения

$$\{1\} \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]/(Q) \rightarrow G(Q) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \{1\},$$

$$\{1\} \rightarrow \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}]/(Q) \rightarrow G_p(Q) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \{1\}.$$

Кроме того, использованы некоторые обозначения групп, заимствованные из [16]. Соответствующие ссылки даны в тексте.

§ 1. Общие результаты

1.1. Метод Ван-Кампена

Основным инструментом, используемым в работе для вычисления фундаментальных групп дополнения кривых, является описанный ниже метод Ван-Кампена (см. [35]).

Пусть $C \subset \mathbb{C}P^2$ - алгебраическая кривая. Выберем точку $0 \in \mathbb{C}P^2$ и проходящую через нее прямую L_0 . Пусть X - результат раздутия $\mathbb{C}P^2$ в точке 0 , и \tilde{C} и \tilde{L}_0 - собственные прообразы кривых C и L_0 . Рассмотрим естественную проекцию $\rho: X \rightarrow \mathbb{C}P^1$. Пусть $A_0 = \rho(\tilde{L}_0)$. Назовем слой проекции ρ особым, если он касается кривой \tilde{C} или проходит через ее особую точку или точку пересечения $\tilde{C} \cap E x_0$. Пусть $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_\alpha$ - особые слои, и A_1, \dots, A_α - их проекции. Фиксируем также неособый слой \tilde{L} над точкой $A \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{A_0, \dots, A_\alpha\}$. Пусть $\tilde{L} \cap E x_0 = S_0$ и $\tilde{L} \cap \tilde{C} = \{S_1, \dots, S_\beta\}$. Выберем точку $S \in \tilde{L} \setminus \{S_0, \dots, S_\beta\}$ и фиксируем в качестве базиса свободной группы $\pi_1(\tilde{L} \setminus \{S_0, \dots, S_\beta\}, S)$ систему простых петель α_i , обходящих вокруг точек S_i , $i = 1, \dots, \beta$.

Рассмотрим простые петли γ_i с началом в точке A , обходящие в $\mathbb{C}P^1 \setminus \{A_0, \dots, A_\alpha\}$ вокруг точек A_i , и произвольные их поднятия $\tilde{\gamma}_i$ в пространстве $Y = X \setminus \tilde{C} \cup \bigcup_{i=0}^{\alpha} \tilde{L}_i \cup E x_0$ с началом в точке S .

Классы петель γ_i образуют базис свободной группы $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{A_0, \dots, A_\alpha\}, A)$.

Пусть m_i - операторы монодромий, возникающих при обносе слоя

\tilde{L} вдоль петли γ_i (точка S описывает при этом петлю $\tilde{\gamma}_i$).
Тогда

$$\pi_1(Y, S) = \{d_j, \tilde{\gamma}_i \mid \tilde{\gamma}_i^{-1} d_j \tilde{\gamma}_i = m_i d_j\}. \quad (I.1)$$

Поднятия $\tilde{\gamma}_i$ могут быть выбраны так, чтобы они стягивались при вклеивании прямых \tilde{L}_i . В этом случае вклеивание прямой \tilde{L}_i добавляет в (I.1) соотношение $\tilde{\gamma}_i = I$. Вклеив таким образом все прямые, не являющиеся компонентами кривой \tilde{C} , получим задание группы $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C \cup L_0)$. Если $0 \notin C$, то вклеивание прямых \tilde{L}_0 и E_{x_0} дает дополнительное соотношение $d_1 \cdot \dots \cdot d_\beta = I$. Если $0 \in C$, но прямая L_0 не является компонентой кривой C , то выберем произвольную прямую $M \neq 0$ и рассмотрим петлю $\tilde{\gamma}$, охватывающую все точки пересечения $C \cap M$. Вклеивание прямой \tilde{L}_0 дает дополнительное соотношение $\gamma = I$.

Отметим два следствия описанного метода.

Следствие I.1. Если кривая C имеет не более одной линейной компоненты, проходящей через точку 0 , то индуцированный включением гомоморфизм $\pi_1(L \setminus C) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ является эпиморфизмом.

Доказательство очевидно.

Следствие I.2. (Теорема Зариского). Пусть кривая C_0 не имеет кратных компонент, и C_t — некоторая ее деформация. Тогда при всех достаточно малых t имеет место естественный эпиморфизм $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C_t)$.

Доказательство см. в [48].

I.2. Простейшие оценки

Предложение I.1. Пусть неприводимая кривая C степени m имеет особую точку 0 кратности s . Тогда $\text{rk } \pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C) \leq m - s$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия I.1.

Следствие I.3. Пусть неприводимая кривая C степени m имеет особую точку кратности $m-1$. Тогда $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C) = \mathbb{Z}_m$.

Следствие I.4. В условиях предложения I.1 многочлен Александра $\Delta_t(C)$ (см. определение в п. 5.1 главы III) делит многочлен $(t^m - 1)^{m-2}$. В частности, многочлен Александра неприводимой кривой степени m делит многочлен $(t^m - 1)^{m-3}$.

Доказательство. Обозначим через G группу $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$.

Пусть d_1, \dots, d_{m-2} - построенные в п. I.1 образующие группы $\pi_1(\tilde{L} \setminus \{S_0, \dots, S_{m-2}\}, S)$ и, в силу следствия I.1, группы G . Эти образующие попарно сопряжены в группе G , и, следовательно, группа $G/K(G)$ порождена, например, классом элемента d_1 (имеющим в ней порядок m). Тогда группа $K(G)$ порождена элементами $u = d_1^m$ и $v_{ij} = d_1^j d_i^{-j-1} d_1^{-j-1}$, $i = 2, \dots, m-2$, $j = 0, \dots, m-1$ (см., например, [I7]). Элемент u инвариантен относительно сопряжения tr_{d_1} , и, следовательно, его класс в модуле $A = K(G)/K'(G) \otimes \mathbb{C}$ равен нулю (так как модуль Александра неприводимой кривой не имеет инвариантной части). При фиксированном i классы элементов v_{ij} в A переставляются автоморфизмом tr_{d_1} , и, следовательно, $\mathbb{C}[Z]$ - модуль A порожден классами элементов $v_{2,0}, \dots, v_{m-2,0}$, что и требовалось.

Последнее утверждение следует из того, что кривая C либо неособа, и тогда $\Delta_t(C) = 1$, либо имеет особую точку кратности не менее двух.

Предложение I.2. Пусть кривая C степени m имеет особую точку O кратности $m-1$ и состоит из ν компонент ($\nu \geq 2$). Тогда $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C) \cong \mathbb{Z} \oplus F_{\nu-2}$.

Доказательство. Среди компонент кривой C имеются $\nu - 1$ прямая, проходящая через точку 0 , и еще одна компонента, пересекающая каждую прямую, проходящую через точку 0 не более, чем в одной точке, отличной от 0 . Поэтому $\pi_1(\tilde{L} \setminus \{S_0, S_1\}, S) = \mathbb{Z}$, и, как легко видеть, все монодромии m_i — тождественные автоморфизмы группы \mathbb{Z} . Поэтому метод Ван-Кампена доставляет задание $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C) = \langle d_1, \gamma_i \ (i=1, \dots, \nu-2) \mid \gamma_i^{-1} d_1 \gamma_i = d_1 \rangle$, что и требовалось.

1.3. Локальная монодромия

Пусть 0 — особая точка кратности d кривой C . Предположим, что особенность 0 такова, что она может встречаться у кривой степени $d+2$. (В дальнейшем полученные результаты будут применяться либо к кривой степени $d+2$, либо к объединению такой кривой и нескольких прямых). Такие особенности описаны в гл. I, п. 2.1. Пусть $S_0 \in Ex_0$ — одна из точек пересечения кривой \tilde{C} и исключительного дивизора Ex_0 . Варианты поведения кривой \tilde{C} в окрестности точки S_0 будем обозначать теми же буквами, что и на рис. I.1 главы I. Фиксируем диск $D \subset \mathbb{C}P^1$ с центром в точке $A_0 = \rho \nu S_0$. Будем считать его настолько малым, что сужение $\rho \nu | \rho \nu^{-1} D$ имеет единственный особый слой $\tilde{L}_0 = \rho \nu^{-1} A_0 = (0S_0)$. Пусть $\Gamma = \partial D$. Фиксируем точку $A'_0 \in \Gamma$ и положим $\tilde{L}'_0 = \rho \nu^{-1} A'_0$. Пусть $\tilde{L}'_0 \cap \tilde{C} = \{S_1, \dots, S_\beta\}$. Будем считать, что S_1 в случае (г) и S_1, S_2 в случаях (д-ж) — точки пересечения с \tilde{L}'_0 тех ветвей кривой \tilde{C} , которые пересекаются с Ex_0 . Кроме того, в случае (е) пусть S_1 — точка пересечения с \tilde{L}'_0 той ветви, которая имеет больший локальный

индекс пересечения с $E x_0$ в точке S_0 .

Для любой прямой $M \neq 0$ положим $D_M = \rho\tau^{-1} D \cap M$ и $\Gamma_M = \partial D_M$.

Пусть \tilde{T} - такая малая трубчатая окрестность исключительного дивизора $E x_0$, что $\tilde{T} \cap \rho\tau^{-1} \Gamma \cap \tilde{C} = \emptyset$, и M'' - такая прямая, что $\Gamma_{M''} \subset \tilde{T}$. Пусть, далее, M' - такая прямая, что $D_M \cap \tilde{C} = \emptyset$. (Прямая M' существует, если диск D достаточно мал). Положим $S^{(i)} = \tilde{L}'_0 \cap M^{(i)}$ (см. рис. I.1). Рассмотрим

группы $G = \pi_1(\tilde{L}'_0 \setminus \{S_0, \dots, S_\beta\}, S'')$ и $\bar{G} = \pi_1(\rho\tau^{-1} D \setminus \tilde{L}_0 \cup \tilde{C} \cup E x_0, S'')$

и индуцированный включением пространств гомоморфизм $in_*: G \rightarrow \bar{G}$.

Фиксируем систему образующих $\{\alpha_j\}$ группы G и соединяющий точки S'' и S' путь ω в $\tilde{L}'_0 \setminus \{S_0, \dots, S_\beta\}$ так, как показано на рис. I.2. Обозначим через γ петлю, обходящую окружность Γ в положительном направлении, и рассмотрим два ее поднятия: петлю $\tilde{\gamma}''$, обходящую окружность $\Gamma_{M''}$, и петлю $\tilde{\gamma}'$ - произведение пути ω , обхода окружности $\Gamma_{M'}$ и пути ω^{-1} .

Обнесем слой \tilde{L}'_0 вдоль пути γ таким образом, чтобы точки S' и S'' скользили, соответственно, по окружностям $\Gamma_{M'}$ и $\Gamma_{M''}$.

Путь ω перейдет при этом в путь ω' (определенный с точностью до связанной на концах гомотопии в пространстве $\tilde{L}'_0 \setminus \{S_0, \dots, S_\beta\}$).

Обозначим через Δ класс петли $\omega' \omega^{-1}$ в группе G . Тогда в группе \bar{G} имеет место очевидное соотношение $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}'' \cdot in_* \Delta$.

Если m' и m'' - автоморфизмы группы G , возникающие при обносах слоя \tilde{L}'_0 вдоль петли γ , при которых точка S'' описывается, соответственно, петли $\tilde{\gamma}'$ и $\tilde{\gamma}''$, то в силу предыдущего соотношения имеем $m' = tr_\Delta \circ m''$.

Вычислим операторы m'' и классы Δ в конкретных случаях

(рис. I.1 г-з главы I). На рис. I.3 показано, как следует выбирать петли d_i и путь ω , и схематически изображено перемещение точек S_i при движении слоя \tilde{L}'_0 . Пояснения и формулы приведены ниже, где через p и q обозначены элементы приведенного типа (p, q) точки S_0 (см. гл. I, п. I.2). В формулах использовано сокращение $\mathcal{K} = d_3 \cdots d_\beta$ (если $\beta = 2$, то $\mathcal{K} = 1$). Кроме выражений для m'' и Δ , в каждом случае приведены также аффинные уравнения модельных кривых, на примере которых легко проследить за монодромией. (Слои \tilde{L}'_0 и \tilde{L}_0 имеют, соответственно, уравнения $y = 0$ и $y = \tau$, $0 < \tau < 1$, и слой \tilde{L}'_0 обносится вдоль петли $y = \tau e^{2\pi i \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 1$).

1. $p = q \geq 1$ (варианты (д) и (ж)). Модельная кривая - $\{x^2 y^p - 1 = 0\}$. Если $y = \tau e^{2\pi i \varphi}$, то $x_{1,2} = \pm \tau^{-1/2} e^{-\rho \pi i \varphi}$.

Точки S_1 и S_2 поворачиваются на угол $-\rho\pi$ вокруг точки S' (см. рис. I.3 а). Рассмотрим автоморфизм δ , отвечающий повороту на угол $-\pi$:

$$\begin{aligned} \delta : d_1 &\mapsto \mathcal{K}^{-1} d_2 \mathcal{K}, \\ d_2 &\mapsto \mathcal{K}^{-1} d_2^{-1} \mathcal{K} d_1 \mathcal{K}^{-1} d_2 \mathcal{K}, \\ d_j &\mapsto \mathcal{K}^{-1} d_2^{-1} \mathcal{K} d_j \mathcal{K}^{-1} d_2 \mathcal{K} \quad (j \geq 3). \end{aligned}$$

Тогда $m'' = \delta^p$, и $\Delta^{-1} = d_1 \cdot \delta d_1 \cdots \delta^{p-1} d_1$.

2. $p > q = 2k \geq 0$ (варианты (г) и (е)). Модельная кривая - $\{(xy^k - 1)(xy^{p-k} - 1) = 0\}$. Если $y = \tau e^{2\pi i \varphi}$, то $x_2 = \tau^{-k} e^{-2k\pi i \varphi}$, $x_1 = \tau^{k-p} e^{2(k-p)\pi i \varphi}$. Если $|\tau| < 1$, то $|x_2| < |x_1|$. Точки S_1 и S_2 поворачиваются вокруг точки S' на углы $2(k-p)\pi$ и $-2k\pi$ соответственно (см. рис. I.3б).

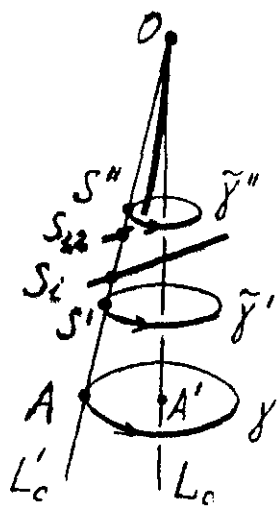


рис. 1.1.

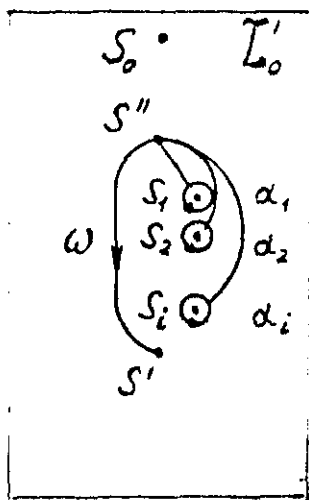


рис. 1.2.

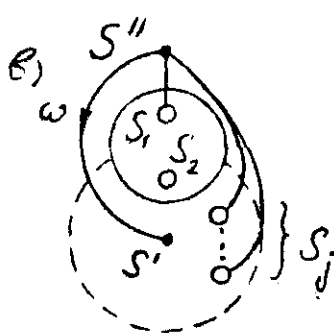
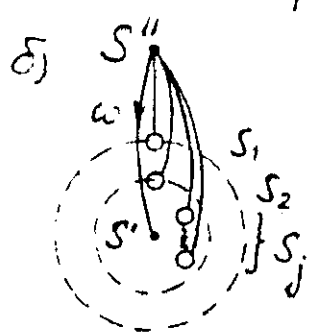
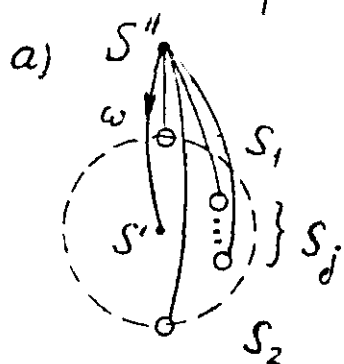


рис. 1.3.

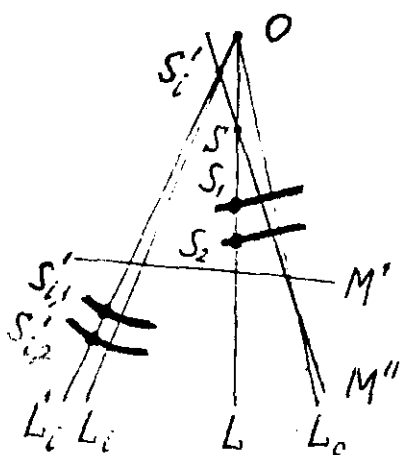


рис. 1.4

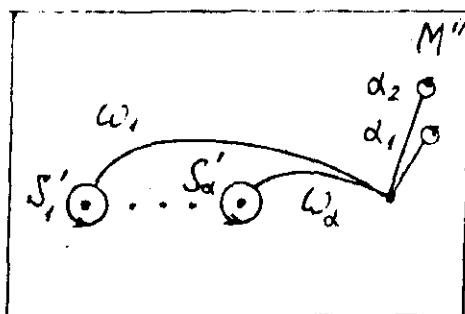


рис. 1.5.

Остальные точки неподвижны. Рассмотрим автоморфизмы δ_1 и δ_2 , отвечающие повороту на угол -2π точек S_1 и S_2 соответственно:

$$\begin{aligned} \delta_1 : d_1 &\mapsto \pi^{-1} d_2^{-1} d_1 d_2 \pi, \\ d_j &\mapsto \pi^{-1} d_2^{-1} d_1^{-1} d_2 \pi d_j \pi^{-1} d_2^{-1} d_1 d_2 \pi \quad (j \geq 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2 : d_1 &\mapsto d_1, \\ d_2 &\mapsto \pi^{-1} d_2 \pi, \\ d_j &\mapsto \pi^{-1} d_2^{-1} \pi d_j \pi^{-1} d_2 \pi \quad (j \geq 3). \end{aligned}$$

Тогда $[\delta_1, \delta_2] = 1$, $m'' = \delta_1^{\rho-k} \delta_2^k$, и

$$\Delta^{-1} = d_1 \cdot (d_2 \cdot \delta_2 d_2 \cdot \dots \cdot \delta_2^{k-1} d_2) \cdot d_1^{-1} \cdot (d_1 \cdot \delta_1 d_1 \cdot \dots \cdot \delta_1^{\rho-k-1} d_1).$$

3. $q > \rho = 2k > 0$ (вариант (з)). Модельная кривая - $\{(xy^k - 1)^2 - y^{q-\rho} = 0\}$. Если $y = re^{2\pi i \varphi}$, то $x_{1,2} = r^{-k} e^{-2k\pi i \varphi} \pm \tau^{(q-2\rho)/2} e^{\pi(q-2\rho)i\varphi}$. Круг, содержащий точки S_1 и S_2 (см. рис. I.3 в), параллельно переносится вдоль пунктирной окружности на угол $-2k\pi$ и поворачивается вокруг своего центра на угол $(q-2\rho)\pi$. Рассмотрим автоморфизмы δ_1 и δ_2 , отвечающие, соответственно, повороту на угол $-\pi$ и переносу на угол -2π :

$$\begin{aligned} \delta_2 : d_1 &\mapsto \pi^{-1} d_1 \pi, \\ d_2 &\mapsto \pi^{-1} d_2 \pi, \\ d_j &\mapsto \pi^{-1} d_2^{-1} d_1^{-1} \pi d_j \pi^{-1} d_1 d_2 \pi \quad (j \geq 3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 : d_1 &\mapsto d_2, \\ d_2 &\mapsto d_2^{-1} d_1 d_2, \\ d_j &\mapsto d_j \quad (j \geq 3). \end{aligned}$$

Тогда $[\delta_1, \delta_2] = 1$, $m'' = \delta_1^{2p-q} \delta_2^k$,

и $\Delta^{-1} = d_1 d_2 \cdot \delta_2(d_1 d_2) \cdot \dots \cdot \delta_2^{k-1}(d_1 d_2)$.

I.4. Кривые с особой точкой кратности $\text{deg } C - 2$

Предложение I.3. Пусть кривая C степени m имеет особую точку кратности $m - 2$. Тогда группа $G = \pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ может быть вычислена по формуле кривой C (см. гл. I, п. I.1) следующим образом: систему образующих группы G составляют элементы γ_i , находящиеся во взаимно однозначном соответствии с парами (ρ_i, q_i) формулы кривой, и еще два элемента d_1, d_2 . Обозначим через σ образующую группы кос B_2 , действующей на группе $\langle d_1, d_2 \rangle$ ($\sigma d_1 = d_1 d_2 d_1^{-1}$, $\sigma d_2 = d_2$). Тогда система соотношений группы G строится следующим образом:

- 1) имеется соотношение $d_1 d_2 \gamma_1 \gamma_2 \dots = 1$;
- 2) каждая отменная пара (ρ_i, q_i) дает пару соотношений $d_1 = \sigma^{q_i - 2\rho_i} d_1$, $d_2 = \sigma^{q_i - 2\rho_i} d_2$;
- 3) каждая неотмеченная пара (ρ_i, q_i) дает (в зависимости от значений ρ_i и q_i) следующие соотношения:

а) $\rho_i = q_i = 2k$: $\gamma_i = (d_1 d_2)^k$;

б) $\rho_i = q_i = 2k + 1$: $d_1 = d_2$, $\gamma_i = d_1^{\rho_i}$;

в) $q_i > \rho_i = 2k \geq 0$: $d_1 = \sigma^{q_i - \rho_i} d_1$, $d_2 = \sigma^{\rho_i - q_i} d_2$, $\gamma_i = (d_1 d_2)^k$;

г) $\rho_i > q_i = 2k \geq 0$. Если все такие пары разбиты на два класса K_1 и K_2 (вторая дополнительная структура в формуле, см. определение в гл. I, п. I.1), и рассматриваемая пара принадлежит классу K_2 , то она дает соотношения $[d_{2k}, d_5^{\rho_i - q_i}] = 1$,

$\gamma_i = d_s^{q_i - p_i} (d_1 d_2)^{p_i - k}$, где $s = 1$ при $\nu = 2$, и $s = 2$ при $\nu = 1$.
 Если разбиение на классы отсутствует, то следует взять те же соотношения, в которых $\nu = 1$ и $s = 2$.

Некоторые свойства групп, получаемых таким образом, исследованы в п.3.1.

Доказательство. Воспользуемся методом Ван-Камнена. Выберем в качестве O особую точку кратности $m-2$, и в качестве \tilde{L}_0 неособый слой проекции $p\tau$. Особые слои \tilde{L}_i находятся в очевидном взаимно однозначном соответствии с парами (p_i, q_i) , составляющими формулу кривой. Выберем малые диски $D_i \subset \mathbb{C}p^1$ с центрами в точках $A_i = p\tau \tilde{L}_i$ (см. п. 1.3). Пусть $\Gamma_i = \partial D_i$. Выберем прямые M' и M'' таким образом, чтобы окружности $\Gamma_{i,M'} = M' \cap p\tau^{-1} \Gamma_i$ и $\Gamma_{i,M''} = M'' \cap p\tau^{-1} \Gamma_i$ удовлетворяли условиям, наложенным в п.1.3 (см. рис. 1.4, прямая M'' должна быть достаточно близка к L_0).
 Фиксируем неособые слои \tilde{L}'_i над точками $A'_i \in \Gamma_i$ и близкий к \tilde{L}_0 неособый слой \tilde{L} над точкой A . Положим $S'_i = \tilde{L}'_i \cap M''$, $\tilde{L}'_i \cap \tilde{C} = \{S'_{i,1}, S'_{i,2}\}$, $\tilde{L}_i \cap M'' = \tilde{A}_i$, $\tilde{L} \cap M'' = S$, $\tilde{L} \cap \tilde{C} = \{S_1, S_2\}$, $Ex_0 \cap \tilde{L}'_i = S'_{i,0}$, $Ex_0 \cap \tilde{L} = S_0$. Фиксируем несамопересекающиеся и попарно не пересекающиеся пути ω_i в $M'' \setminus \{\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_d\}$, соединяющие точки S и S'_i (см. рис. 1.5). Пусть $\tilde{\gamma}'_i$ и $\tilde{\gamma}''_i$ — петли с началом в точке S'_i , введенные в п. 1.3. Положим $\gamma_i = \omega_i \tilde{\gamma}''_i \omega_i^{-1}$.

Петли γ_i накрывают петли, классы которых порождают группу $\pi_1(\mathbb{C}p^1 \setminus \{A_0, \dots, A_d\}, A)$.

Выберем системы образующих фундаментальных групп слоев:
 $d'_{i,1}, d'_{i,2} \in \pi_1(\tilde{L}'_i \setminus \{S'_{i,0}, S'_{i,1}, S'_{i,2}\}, S'_i)$ и $d_1, d_2 \in \pi_1(\tilde{L} \setminus \{S_0, S_1, S_2\}, S)$.
 Обозначим через $d_{i,1}, d_{i,2}$ элементы последней группы, полученные

переносом образующих $d'_{i,1}, d'_{i,2}$ вдоль пути ω_i^{-1} .

Элементы d_1, d_2 и γ_i порождают группу $\pi_1(CP^2 \setminus \cup_{i=0}^d L_i, S)$.

Все соотношения имеют вид $\gamma_i^{-1} d_j \gamma_i = m_i'' d_j$, где m_i'' - операторы монодромий. Действие этих операторов на образующих $d_{i,1}, d_{i,2}$ изучено в п. I.3. Если в полученных выражениях положить $d_j = I$ при $j \geq 3$, то получим $m_i'' = \sigma^{q_i - 2\rho_i}$. Так как образующие $d_{i,1}, d_{i,2}$ отличаются от d_1, d_2 на действие некоторой степени автоморфизма σ (порождающего группу кос $B_2 \cong \mathbb{Z}$), то в образующих d_1, d_2 операторы m_i'' имеют тот же вид. Кроме того, как легко видеть, те же выражения справедливы и в том случае, когда $\rho_i = 0$ (см. рис. I.1 а, б, в главы I). Тем самым установлен вид соотношений, доставляемых отмеченными парами (ρ_i, q_i) формулы кривой. (Если пара отмечена, то прямую \tilde{L}_i вклеивать не нужно).

Если пара (ρ_i, q_i) не отмечена, то необходимо вклеить слой \tilde{L}_i . При этом затягивается петля $\omega_i \tilde{\gamma}_i' \omega_i^{-1}$. Следовательно, возникают соотношения $\gamma_i = \Delta_i^{-1}$ и $d_j = \Delta_i^{-1} \sigma^{q_i - 2\rho_i} d_j \Delta_i$ (определение классов Δ_i и выражения для них см. в п. I.3; если $\rho_i = 0$, то положим $\tilde{\gamma}_i' = \tilde{\gamma}_i''$, $\Delta_i = 1$). Подставляя $d_j = 1$ при $j \geq 3$, найдем следующие выражения для Δ :

- а) $\rho_i = q_i = 2k : \Delta_i = (d_{i,1} d_{i,2})^{-k}$;
- б) $\rho_i = q_i = 2k+1 : \Delta_i = (d_{i,1} d_{i,2})^{-k} d_{i,1}^{-1}$;
- в) $q_i > \rho_i = 2k : \Delta_i = (d_{i,1} d_{i,2})^{-k}$;
- г) $\rho_i > q_i = 2k : \Delta_i = (d_{i,1} d_{i,2})^{k-\rho_i+1} d_{i,2}^{\rho_i-q_i-1} d_{i,1}^{-1}$.

Из этих выражений следует, что соотношения, доставляемые рассматриваемой парой, имеют в образующих $d_{i,1}$, $d_{i,2}$ вид, указанный в формулировке предложения I.3. В каждом случае легко проверить, что эти соотношения (точнее, порожденная ими нормальная подгруппа) инвариантны относительно действия группы B_2 . Поэтому можно заменить их на соотношения того же вида, записанные в образующих d_1, d_2 . Исключение составляет случай $p_i > q_i$, в котором соотношения инвариантны лишь относительно действия автоморфизма σ^2 . Поэтому здесь, переходя к образующим d_1, d_2 , необходимо следить за монодромией в группе подстановок S_2 .

Наконец, вклеивание прямой \tilde{L}_0 дает, очевидно, соотношение $d_1 d_2 \gamma_1 \gamma_2 \dots = 1$. Предложение доказано.

I.5. Другие кривые с вырожденными особенностями

В п. I.3 главы I описаны два класса кривых, изотопический тип которых, а следовательно, и фундаментальная группа дополнения, определяются набором особенностей кривой. Ниже показано, как можно вычислить фундаментальные группы таких кривых.

Пусть C — кривая из одного из этих классов. Тогда она может быть получена преобразованием $T(\bar{o}, \bar{o}', \bar{o}'')$ из кривой \bar{C} степени d , имеющей особую точку o''' кратности $d-1$ или $d-2$ (см. доказательство теорем I.3 и I.4 главы I). Возможные расположения точек $\bar{o} \leftarrow \bar{o}' \leftarrow \bar{o}''$ относительно кривой \bar{C} показаны на рис. I.3 и I.4 главы I. Во всех случаях прямая $(\bar{o} \bar{o}')$ проходит через точку o''' . Пусть $\bar{C}' = \bar{C} \cup (\bar{o} \bar{o}')$. Обозначим через X пространство, получаемое из $\mathbb{C}P^2$ раздутием точек \bar{o}, \bar{o}' и \bar{o}'' , через \bar{C}'' — собственный прообраз кривой \bar{C}' . Тогда, как легко видеть, $\mathbb{C}P^2 \setminus \bar{C}' \cong X \setminus \bar{C}'' \cup Ex_{\bar{o}'} \cup Ex_{\bar{o}''}$, и $\mathbb{C}P^2 \setminus C \cong$

$X \setminus \bar{C}'' \cup E x_{\bar{0}} \cup E x_{\bar{0}'}$. Следовательно, группа $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ получается из группы $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus \bar{C}')$ добавлением соотношения, доставляемого вклеиванием исключительного дивизора $E x_{\bar{0}''}$. Это соотношение можно получить следующим образом: рассмотрим маленький диск \tilde{D} , трансверсально пересекающий $E x_{\bar{0}''}$ в точке \tilde{y} . Можно считать, что \tilde{D} лежит на аналитической ветви \tilde{b} . Пусть D и b - проекции диска \tilde{D} и ветви \tilde{b} в $\mathbb{C}P^2$. Тогда дополнительное соотношение имеет вид $\Gamma = I$, где Γ - класс петли, обходящей границу ∂D .

В рассматриваемой ситуации ветвь b касается прямой $(\bar{0} \bar{0}')$ в точке $\bar{0}'$, и, как легко видеть, класс Γ зависит от поведения кривой \bar{C} в окрестности прямой $(\bar{0} \bar{0}')$ и от локального индекса пересечения $(b \circ \bar{C})_{\bar{0}}$. Пусть $(\bar{0} \bar{0}') = (o''' o_1)$, (ρ_1, q_1) при $\deg \bar{C} = d+2$ или ρ_1 при $\deg \bar{C} = d+1$ - приведенный тип точки o_1 (см. гл. I, п. I.2 и I.1). Обозначим через d_1, d_2 и γ_1 соответственно образующие фундаментальной группы слоя и образующую, соответствующую точке o_1 (см. п. I.4). При $\rho_1 > q_1$ будем предполагать, что d_1 соответствует той ветви кривой \bar{C} , которая имеет больший локальный индекс пересечения с $E x_{o'''}$ в точке o_1 . Если $\deg \bar{C} = d+1$, то введем аналогично образующие d и γ_1 . Тогда дополнительное соотношение $\Gamma = I$ имеет вид:

I. Степень кривой C нечетна (см. рис. I.3 главы I):

а) $\gamma_1^2 d_1 d_2 d_1 = 1$;

б) $\gamma_1^2 d = 1$;

в) $\tilde{\gamma}_1^2 d_2 = 1$, где $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 [d_1 d_2^{1-\rho_1} (d_1 d_2)^{\rho_1-1}]^{-1}$.

2. Степень кривой C четна (см. рис. I.4 главы I):

а) $\gamma_1^2 d_1 d_2 = 1$;

б) $(\gamma_1 d_1^{-p_1})^2 = 1$;

в) $(\gamma_1 \Delta_1)^2 = 1$; определение класса Δ см. в п. I.3,

выражения для него - в доказательстве предложения I.3.

г) $\gamma_1^2 d_1 d_2 = 1$.

Замечание I.I. Все приведенные выше рассуждения справедливы, очевидно, и для приводимых кривых, получающихся указанным способом из (приводимой) кривой \bar{C} .

Предложение I.4. Если неприводимая кривая C нечетной степени $2\rho + 1$ имеет особую точку, примыкающую к полуквазиоднородной особенности типа $(\rho, 4\rho)$, то группа $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ абелева.

Доказательство. Если $\deg \bar{C} = d+1$, то утверждение очевидно, так как $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ получается факторизацией группы $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus \bar{C} \cup (\bar{0} \bar{0}'))$, которая абелева (см. предложение I.2). Если $\deg \bar{C} = d+2$, то элементы d_1 и d_2 порождают группу $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ (предложение I.3). Поэтому достаточно доказать, что $[d_1, d_2] = 1$. Рассмотрим оба случая:

а) $\gamma_1^2 d_1 d_2 d_1 = 1$. Учитывая, что $\gamma_1^{-1} d_i \gamma_1 = \sigma d_i$

(см. предложение I.3), получаем

$$d_1 d_2 d_1 d_2 d_1^{-1} d_2^{-1} d_1^{-1} = \gamma_1^{-2} d_2 \gamma_1^2 = \sigma^2 d_2 = d_1 d_2 d_1^{-1},$$

откуда следует, что $d_1 d_2 d_1^{-1} = d_2$.

б) $\tilde{\gamma}_1^2 d_2 = 1$. Докажем, что при любом $S \in \mathbb{Z}$ выполнено

коммутационное соотношение $[d_2, \pi^S d_2 \pi^{-S}] = 1$, где $\pi = d_1 d_2$.

При $S = 0$ это очевидно. Предположим, что соотношение выполнено

при $S = K \geq 0$ и докажем его для $S = K + 1$. В силу предположения имеем $[d_2, d_2 \pi^k d_2 \pi^{-k} d_2^{-1}] = 1$. Приравнявая два выражения для элемента $\tilde{\gamma}_1^{-2} \pi^{k+1} d_2 \pi^{-k-1} \tilde{\gamma}_1^2$ (первое получается из соотношения $\tilde{\gamma}_1^2 = d_2^{-1}$, второе - из того, что $\text{tr}_{\tilde{\gamma}_1} = \sigma^{-2\rho_1} = \text{tr}_{\pi \rho_1}$), находим

$$d_2 \pi^{k+1} d_2 \pi^{-k-1} d_2^{-1} = d_1 d_2^{-\rho_1} \cdot d_2 \pi^k d_2 \pi^{-k} d_2 d_2^{-1} d_1^{-1}.$$

Правая часть этого равенства равна $d_1 d_2 \pi^k d_2 \pi^{-k} d_2^{-1} d_1^{-1}$, что и требовалось доказать. Из справедливости соотношения при $S = K$ следует его справедливость и при $S = -K$. Для завершения доказательства предложения осталось заметить, что в группе $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus \bar{C} \cup (\bar{0} \bar{0}'))$ имеет место соотношение вида $d_1 = \pi^5 d_2 \pi^{-5}$ (равносильно соотношению $d_2 = \sigma^{-25-1} d_2$, см. предложение I.3), и, следовательно, $[d_1, d_2] = 1$.

§ 2. Кривые пятой степени

2.1. Список кривых, имеющих неабелеву фундаментальную

группу дополнения G

I. Неприводимые кривые

1) $C_5(3A_4) - G = \langle a, b \mid b = ab^4a, a^2 = b^2 a^3 b^2 \rangle$

(свойства этой группы см. в п. 3.2);

2) $C_5(A_6 + 3A_2) - G = \langle u, v \mid u = v^2 u^2 v^2, v^2 = u v^5 u \rangle$

(свойства этой группы см. в п. 3.3).

2. Кривые типа $C_4 + C_1$. Для обозначения расположения прямой C_1 относительно кривой четвертой степени C_4 будем использо-

вать символ (...), где в скобках перечислены точки пересечения кривых C_1 и C_4 : $\times d$ - d -кратное пересечение в неособой точке; A_p - прямая C_1 проходит через точку типа A_p кривой C_4 ; A_p^* - прямая C_1 касается кривой C_4 в точке типа A_p .

1) $C_4(3A_2)$: а) $(\times 2, \times 2): G = \langle a, b, d \mid aba = bab, bdb = dbd, abdb^{-1}a = bdb^{-1}abdb^{-1} \rangle$;
 б) $(\times 2, \times 1, \times 1)$ или $(A_2^*, \times 1) - G = B_3$;
 в) в остальных случаях $G = G_3(t+1)$;

2) $C_4(2A_2 + A_1)$: а) $(\times 4) - G = B_4$;
 б) $(\times 2, \times 2) - G = B_3$;

3) $C_4(2A_2)$: $(\times 4)$ или $(\times 2, \times 2) - G = B_3$;

4) $C_4(A_4 + A_2)$: а) $(\times 3, \times 1) - G = \mathbb{Z} \oplus \langle 2, 3, 5 \rangle$ (см. п. 3.4);
 б) $(A_4^*) - G = B_3$;
 в) $(A_2, \times 2) - G = G_5(t+1)$;

5) $C_4(A_3 + A_2) + (A_2, \times 2) - G = B_3$;

✓ 6) $C_4(A_6) + (A_6, \times 2) - G = B_3$; для неособой точки \times и $\{w^2\}$ см. п. 3.4

7) $C_4(A_5)$: $(\times 4)$ или $(\times 2, \times 2) - G = B_3$;

8) $C_4(E_6)$: а) $(\times 4) - G = T_{3,4}$;
 б) $(\times 2, \times 2) - G = B_3$.

3. Кривые типа $C_3 + C_2$ (см. обозначения в п. 3.2 главы I):

$$C_3(A_2) + (3, 3) - G = \langle a, b \mid [a^3, b] = 1, ab^2 = ba^2 \rangle$$

(свойства этой группы см. в п. 3.5).

4. Кривые типа $C_3 + 2C_1$. Для обозначения расположения

каждой из прямых относительно кубики будем использовать такой же список (...), как и в 2. Кроме того, если прямые пересекаются в точке, лежащей на кубике, то соответствующие элементы в обоих списках будем подчеркивать.

$$1) C_3(A_2) + (\underline{x3}) + (\underline{x2}, \underline{x1}) - G = \langle a, b, c \mid aca = cac, [b, c] = 1, (ab)^2 = (ba)^2 \rangle;$$

$$2) C_3(A_2) + (A_2^*) + (\underline{x3}) - G = T_{2,6};$$

$$3) C_3(A_2) + (\underline{x3}) + (A_2, \underline{x1}) - G = T_{2,4};$$

$$4) C_3(A_2) + (\underline{x3}) + (\underline{x1}, \underline{x1}, \underline{x1}), C_3(A_2) + (\underline{x3}) + (A_2, \underline{x1}),$$

$$C_3(A_2) + (\underline{x3}) + (\underline{x1}, \underline{x1}, \underline{x1}), C_3(A_2) + (\underline{x2}, \underline{x1}) + (\underline{x2}, \underline{x1}) - G = Z \oplus B_3;$$

$$5) C_3(A_1) + (\underline{x3}) + (\underline{x3}) - G = G(t^3 - 1);$$

$$6) C_3(A_2) + (A_2, \underline{x1}) + (\underline{x2}, \underline{x1}), C_3(A_1) + (\underline{x2}, \underline{x1}) + (\underline{x2}, \underline{x1}),$$

$$C_3(A_1) + (\underline{x3}) + (\underline{x2}, \underline{x1}) - G = G(t^2 - 1).$$

5. Кривые типа $2C_2 + C_1$

1) Коники имеют точку 3-кратного касания. Если прямая касается обеих коник в этой точке, то $G = F_2$, в остальных случаях $G = T_{2,4}$;

2) Коники касаются друг друга в двух точках. Если прямая проходит через обе эти точки, то $G = F_4$, в остальных случаях $G = T_{2,4}$;

3) Коники имеют точку 2-кратного касания, прямая - общая касательная $G = Z \oplus B_3$.

6. Кривые типа $C_2 + 3C_1$

1) Три прямые пересекаются в одной точке. Если две из них касаются коники, то $G = \langle a, b, c \mid [a, b] = [a, c^{-1}bc] = 1, (bc)^2 = (cb)^2 \rangle;$

в остальных случаях $G = \mathbb{Z} \oplus F_2$.

2) Прямые не пересекаются в одной точке, две из них касаются коники. Если третья прямая касается коники, то $G = \langle a, b, c \mid (ab)^2 = (ba)^2, (ac)^2 = (ca)^2, [b, c] = 1 \rangle$; если третья прямая соединяет точки касания первых двух, то $G = \mathbb{Z} \oplus F_2$; в остальных случаях $G = \mathbb{Z} \oplus T_{2,4}$.

7. Кривые типа $5C_1$. Группа G зависит от наличия точек кратности выше двух: если есть 5-кратная точка, то $G = F_4$; если есть 4-кратная точка, то $G = \mathbb{Z} \oplus F_3$; если есть одна или две 3-кратные точки, то G , соответственно, равна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus F_2$ или $F_2 \oplus F_2$.

2.2. Общие замечания

Если кривая степени 5 имеет особую точку кратности 3 или 4, то ее фундаментальная группа может быть вычислена с использованием предложений I.3 или I.2. В остальных случаях для вычисления фундаментальной группы будут использованы следующие приемы:

1) Теорема Зариского (см. следствие I.2) — если кривая C получается возмущением кривой C' , и группа $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C')$ абелева, то группа $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ тоже абелева.

2) Теорема Нори (см. [42]) — позволяет установить абелевость групп большинства неприводимых кривых (имеющих не очень глубокие особенности).

3) Метод Ван-Кампена. Применение этого метода требует знания монодромии, возникающей при обходе неособого слоя проекции p_C вдоль некоторой петли γ . Петлю γ можно выбрать в виде $\omega \cdot \gamma' \cdot \omega^{-1}$, где γ' — маленькая петля, обходящая вокруг особого слоя, а ω — путь, соединяющий начала петель γ' и γ . Локальную

монодромию, возникающую при обходе слоя вдоль петли γ' , можно считать известной (она может быть вычислена на модельных примерах, ср., например, п. I.3). Для того, чтобы проследить за перемещением точек, отсекаемых кривой C на неособом слое $L_t = \rho^{-1}(\omega(t))$, можно выбрать кривую C и путь ω вещественным. Тогда если при любом t все точки пересечения $C \cap L_t$, кроме, быть может, двух, вещественны, то за их перемещением легко проследить, зная расположение вещественной части кривой C в $\mathbb{R}P^2$.

4) Применение бирациональных (квадратичных) преобразований. Пусть кривая C получается бирациональным преобразованием из кривой \bar{C} . Тогда группа $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ является факторгруппой группы $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus \bar{C} \cup Ex_i)$, где Ex_i — исключительные дивизоры, вклеиваемые при обратном преобразовании (от C к \bar{C}). Возникающие при этом дополнительные соотношения могут быть получены так же, как и в п. I.5.

Остальные пункты настоящего параграфа посвящены геометрическому исследованию фундаментальных групп кривых пятой степени, имеющих лишь двойные особые точки, т.е. получению заданий этих групп с помощью образующих и соотношений. Алгебраическому исследованию сложных групп посвящен § 3.

2.3. Кривые типа $C_5(3A_4)$

Кривая C типа $C_5(3A_4)$ может быть получена преобразованием $T(\bar{0}_1, \bar{0}_2, \bar{0}_3)$ из кривой \bar{C} типа $C_4(3A_2)$. Расположение точек $\bar{0}_1, \bar{0}_2, \bar{0}_3$ и исключительных дивизоров Ex_1, Ex_2, Ex_3 показано на рис. 2.1. Группа $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ получается из группы $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus \bar{C} \cup Ex_1 \cup Ex_2 \cup Ex_3)$ добавлением соотношений $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$,

где γ_i — классы границ маленьких дисков с центрами в точках \bar{b}_i , лежащих на ветвях b_i , которые изображены пунктиром на рис. 2.1.

Воспользуемся методом Ван-Кампена, выбрав в качестве центра проекции одну из точек возврата 0 кривой \bar{C} (рис. 2.1). Особые слои L_0 и L (см. п. 1.1) и особые слои $L_1 - L_4$ и $E x_1$ изображены на рис. 2.1. Выберем прямую M , достаточно близкую к L_0 , и будем считать, что отмеченная точка в каждом слое L' — это точка пересечения $M \cap L'$. Точки прямой M параметризуют, очевидно, слои проекции. Выберем образующие a, b, c, d фундаментальной группы $\pi_1(L \setminus \bar{C} \cup E x_1 \cup E x_2 \cup E x_3)$, так, как показано на рис. 2.1 и 2.2. Обозначим через $\tilde{\gamma}''$ класс петли, лежащей в M и охватывающей точку пересечения прямой M со слоем L_3 и близкие к 0 точки пересечения прямой M с кривой \bar{C} (см. рис. 2.3; строгое определение см. в п. 1.3). Обозначим через δ класс петли, лежащей в M и охватывающей точку пересечения $M \cap E x_1$ (рис. 2.3).

Группа $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ порождена элементами a, b, c, d, δ . Соотношение $\gamma_1 = 1$ переписывается в этих образующих в виде

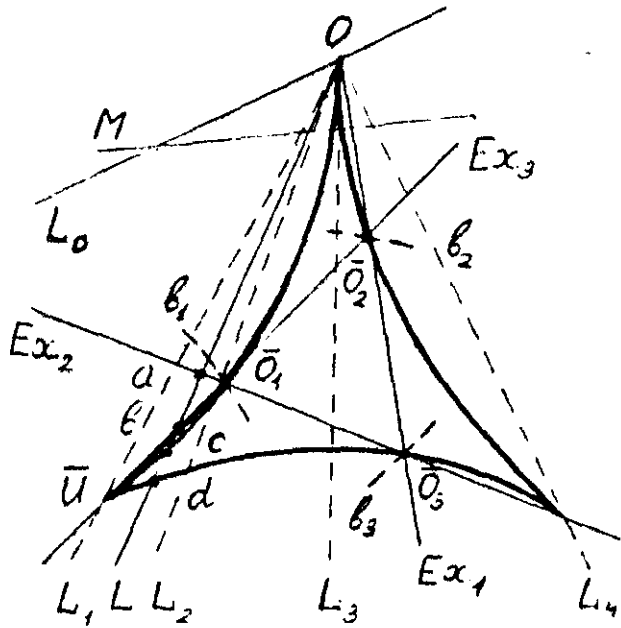
$$abc = 1. \quad (2.1 \text{ а})$$

Все остальные соотношения выписываются с учетом (2.1 а). Соотношения $\gamma_2 = \gamma_3 = 1$ дают

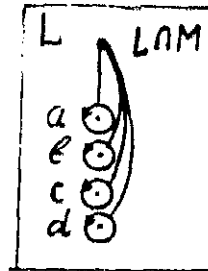
$$\delta d c d^{-1} b = \delta b^{-1} d c^{-1} = 1. \quad (2.1 \text{ б})$$

Обнос слоя L вокруг слоев L_1, L_3, L_4 вдоль петель, показанных на рис. 2.3, даст соотношения

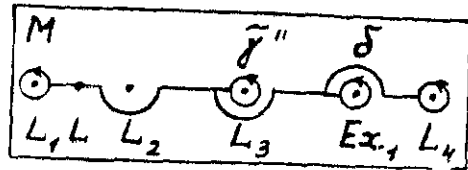
$$L_1 : [b, cd] = 1, \quad (2.1 \text{ в})$$



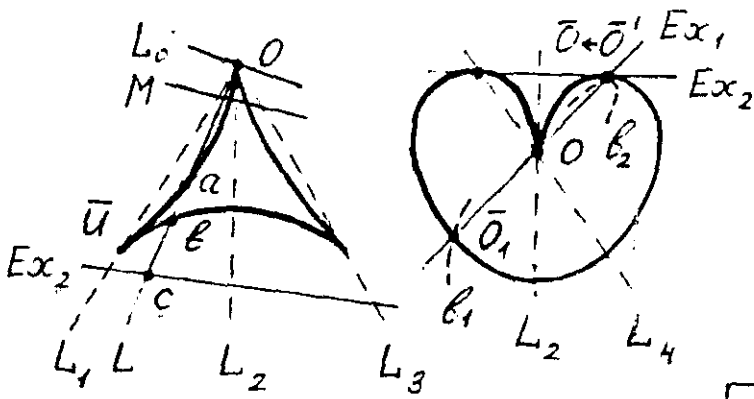
puc. 2.1.



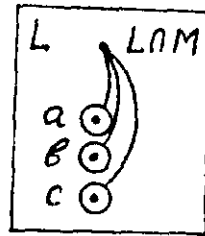
puc. 2.2.



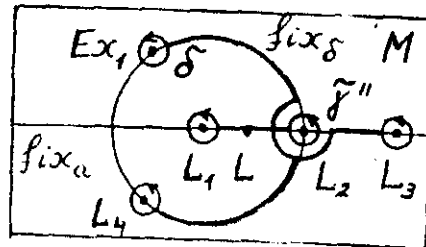
puc. 2.3.



puc. 2.4.



puc. 2.5.



puc. 2.6.

$$bc dc = d b c d, \quad (2.1 \text{ г})$$

$$L_3: [c, (c^{-1}d)^2] = 1, \quad (2.1 \text{ д})$$

$$L_4: [a, c^{-1}dc d^{-1}cad] = 1, \quad (2.1 \text{ е})$$

$$ada^{-1}c^{-1}dcd^{-1} = c^{-1}dcd^{-1}cadc^{-1}dcd^{-1}c. \quad (2.1 \text{ ж})$$

Наконец, вклеивание прямой L_0 дает соотношение $abcd\tilde{\delta}\tilde{\gamma}''=1$.

Выражая $\tilde{\delta}$ из (2.1 б) и представляя $\tilde{\gamma}''$ в виде $\tilde{\gamma}''=(abcd) \times (c^{-1}abcd)^{-2} = dcd^{-1}c$ (это представление следует вместе с (2.1 д) из результатов п. I.3), переписываем это соотношение в виде

$$b = cd. \quad (2.1 \text{ з})$$

Соотношения (2.1 а - з) образуют полную систему определяющих соотношений группы $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$. Структура этой группы изучена в п. 3.2.

2.4. Кривые типа $C_5(A_6 + 3A_2)$

Кривая C типа $C_5(A_6 + 3A_2)$ может быть получена из кривой \bar{C} типа $C_4(3A_2)$ преобразованием $T(\bar{0}, \bar{0}', \bar{0}_1)$. Расположение точек $\bar{0} \leftarrow \bar{0}'$, $\bar{0}_1$ и исключительных дивизоров $E x_1$, $E x_2$ показано на рис. 2.4 а, б, отличающихся различным выбором инволюции комплексного сопряжения в $\mathbb{C}P^2$. Прямая $E x_2$ - двойная касательная к \bar{C} (на рис. 2.4 а точки касания - мнимые), прямая $E x_1$ соединяет одну из точек касания с одной из точек возврата 0 кривой \bar{C} (на рис. 2.4 а не видна). Переход от группы $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus \bar{C} \cup E x_1 \cup E x_2)$ к группе $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ осуществляется добавлением соотношений $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, где γ_1 и γ_2 - классы границ маленьких дисков с центрами в точках $\bar{0}_1$ и $\bar{0}$,

лежащих на показанных на рис. 2.4 б ветвях v_1 и v_2 .

Для применения метода Ван-Кампена выберем в качестве центра проекции точку O . На рис. 2.4 показаны неособые слои L_0 и L и особые слои $L_1 - L_4$ и E_{x_2} . Выберем прямую M и введем классы $\tilde{\gamma}''$ и δ так же, как и в п. 2.3. Выбор образующих a, b, c группы слоя L показан на рис. 2.5, пути обноса слоя L вокруг особых слоев - на рис. 2.6, где fix_a и fix_δ - множества неподвижных точек прямой M при различных выборах инволюции комплексного сопряжения.

Обнос слоя L вокруг особых слоев L_1, L_2, L_3 и L_4 дает соотношения

$$L_1 : aba = bab, \quad (2.2 \text{ а})$$

$$L_2 : [a, (bc)^2] = 1, \quad (2.2 \text{ б})$$

$$L_3 : cac^{-1}bcac^{-1} = bca\bar{c}^{-1}b, \quad (2.2 \text{ в})$$

$$L_4 : caca = acac. \quad (2.2 \text{ г})$$

Соотношения $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ переписываются в виде

$$\delta \cdot b = \delta \cdot (b^{-1}abc)^2 = 1. \quad (2.2 \text{ д})$$

Наконец, вклеивание слоя L_0 дает соотношение $abc\tilde{\gamma}''\delta = 1$, которое с учетом того, что $\delta = b^{-1}$ (из (2.2 д)) и $\tilde{\gamma}'' = (abc)^2(bc\bar{c})^{-2}$ (см. п. 1.3), переписывается в виде

$$abcabc a = b^2c. \quad (2.2 \text{ е})$$

Свойства группы $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$, определяемой соотношениями (2.2 а - е), изучены в п. 3.3.

2.5. Другие неприводимые кривые

I. По теореме Нори (см. [42]) фундаментальная группа допол-

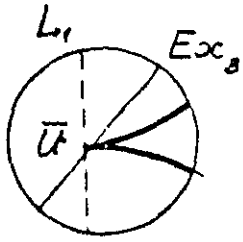
нения кривой C типа $C_p(\sum a_i \delta_i)$ абелева, если $\sum a_i s(\delta_i) < p^2$, где $s(\delta_i)$ - некоторое число, зависящее от типа δ_i особенности. Можно считать, что $s(A_1) = 2$, и $s(A_p) = 2p + 2$ при $p \geq 2$. Это позволяет доказать абелевость групп большинства неприводимых кривых пятой степени. Кривые, не удовлетворяющие условиям теоремы Нори, перечислены в списке примыканий в п. 2.4 главы I.

2. Из предложения I.4 следует, что если неприводимая кривая пятой степени имеет особую точку типа A_p с $p \geq 7$, то ее группа абелева. Из этого и из теоремы Зариского следует абелевость групп всех кривых, получающихся возмущением кривых типов $C_5(A_{12})$ и $C_5(A_8 + A_4)$ (см. гл. I, п. 2.4).

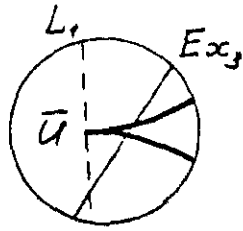
3. Кривая типа $C_5(2A_4 + A_2 + A_1)$ получается возмущением кривой типа $C_5(3A_4)$ - для этого достаточно на рис. 2.1 сдвинуть прямую E_{x_3} с особой точки \bar{u} (см. рис. 2.7, где показана окрестность точки \bar{u}). При этом в дополнение к (2.1 а - з) возникают соотношения $[b, c] = [b, d] = 1$. Отсюда и из (2.1 з) следует, что $[c, d] = 1$, а из (2.1 а, б, з) следует, что элементы c и d порождают группу.

4. Кривая типа $C_5(A_6 + 2A_2 + A_1)$ получается возмущением кривой типа $C_5(A_6 + 3A_2)$ - для этого достаточно возмутить точку возврата \bar{u} кривой \bar{C} (см. рис. 2.4 и рис. 2.8, где показана окрестность точки \bar{u}). Дополнительно к (2.2 а-е) возникает соотношение $a = b$. Отсюда и из (2.2 е) следует, что $c = a^{-3}$, и, следовательно, группа абелева.

5. Кривые типов $C_5(A_5 + 3A_2)$, $C_5(A_3 + 4A_2)$ и $C_5(A_4 + 3A_2 + A_1)$ получаются возмущением кривой типа $C_5(A_6 + 3A_2)$. Пусть V - маленький шар с центром в точке 0 (рис. 2.4). Топологически можно считать, что все возмущения происходят в этом шаре - либо

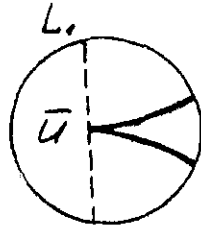


a) $3A_4$

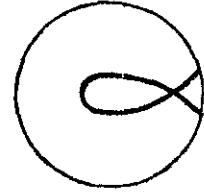


б) $2A_4 + A_2 + A_1$

рис. 2.7.

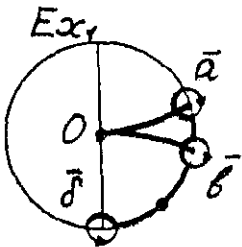


a) $A_6 + 3A_2$

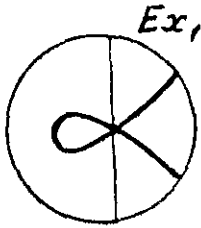


б) $A_6 + 2A_2 + A_1$

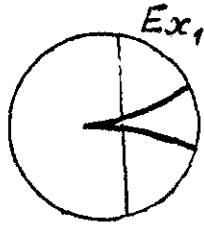
рис. 2.8.



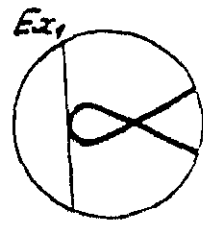
a) $A_6 + 3A_2$



б) $A_5 + 3A_2$



в) $A_3 + 4A_2$



г) $A_4 + 3A_2 + A_1$

рис. 2.9.

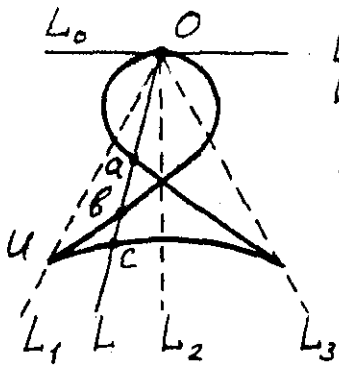


рис. 2.10.

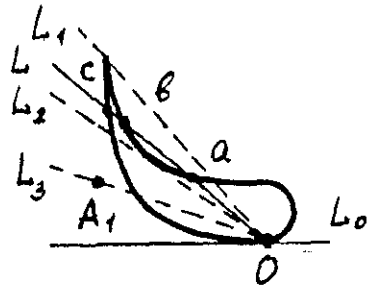


рис. 2.11.

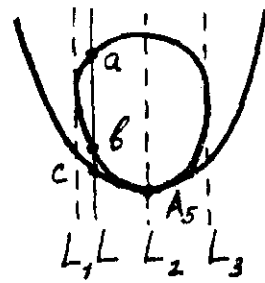


рис. 2.12.

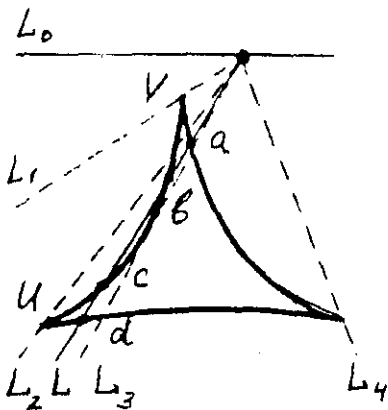


рис. 2.13.

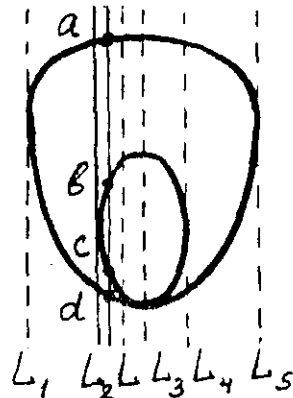


рис. 2.14.

возмущается точка 0 , либо сдвигается прямая $E x_1$ (см. рис. 2.9). Группа $\pi_1(\partial V \setminus \bar{C} \cup E x_1)$ порождена, очевидно, тремя образующими \bar{a} , \bar{b} , $\bar{\delta}$, которые могут быть выбраны таким образом, что при гомоморфизме, индуцированном включением, элементы \bar{a} , $\bar{a}\bar{b}$ и $\bar{\delta}$ переходят, соответственно, в a , $\tilde{\gamma}''$ и δ (см. рис. 2.9 а). Ниже в каждом случае выписаны соотношения, добавляющиеся к (2.2 а-е) в результате возмущения, и доказано, что эти соотношения влекут абелевость группы.

Кривая типа $C_5(A_5 + 3A_2)$ (рис. 2.9 б). Дополнительное соотношение - $\bar{a} = \bar{b}$. С учетом того, что $\bar{a} \mapsto a$, $\bar{b} \mapsto a^{-1}\tilde{\gamma}''$, и $\tilde{\gamma}'' = (abc)^2 (bc)^{-2}$, это соотношение переписывается в виде $[a, bc] = 1$. Отсюда и из (2.2 е) следует, что $c = a^{-3}$, и, следовательно, $[a, b] = 1$.

Кривая типа $C_5(A_3 + 4A_2)$ (рис. 2.9 б). Дополнительное соотношение $[\bar{\delta}, \bar{a}] = 1$ переписывается с учетом того, что $\delta = b^{-1}$ (в силу (2.2 д)) в виде $[a, b] = 1$. Из этого и из (2.2 д) следует, что $b = c a c a$, и, в силу (2.2 г), $b = a c a c$. Подставляя первое выражение в правую часть (2.2 е), а второе - в левую часть, находим $c = a c a c a$, откуда с учетом (2.2 г) следует $c = a^{-3}$.

Кривая типа $C_5(A_4 + 3A_2 + A_1)$. Дополнительное соотношение $[\bar{a}, \bar{b}] = 1$ влечет $[a, \tilde{\gamma}''] = 1$. Так как $abc \tilde{\gamma}'' \delta = 1$ (см. 2.2е), и $\delta = b^{-1}$ (см. 2.2 д), это влечет $[a, b^{-1} abc] = 1$. Из (2.2д) следует, что тогда $[a, \delta] = 1$, и, следовательно, группа абелева (см. предыдущий случай кривой типа $C_5(A_3 + 4A_2)$).

6. Все остальные кривые получаются возмущениями кривых, абелевость групп которых уже доказана (см. гл. I, п. 2.4).

2.6. Кривые типа $C_4 + (x^4)$

1. $C_4(2A_2 + A_1) + (x^4)$. Используя построение, описанное в гл. I при доказательстве предложения 3.1, легко показать, что кривая должна иметь вещественную часть, изображенную на рис.

2.10. Воспользуемся методом Ван-Кампена, выбрав в качестве L_0 3-кратную касательную и в качестве O - точку касания. Неособый слой L и особые слои L_i показаны на рис. 2.10, образующие a , b , c в группе слоя L - на рис. 2.5. Обход особых слоев дает соотношения

$$\begin{aligned} L_1 : bcb &= cbc, \\ L_2 : [a, b] &= 1, \\ L_3 : asa &= cas. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В результате получено стандартное задание группы $\text{Kos } B_4$.

2. $C_4(2A_2) + (x^4)$. Возмущая на рис. 2.10 точку типа A_1 , получаем в дополнение к (2.3) соотношение $a = b$. Таким образом получено стандартное задание группы $\text{Kos } B_3$.

3. $C_4(A_2 + 2A_1) + (x^4)$. Возмущая на рис. 2.10 точку u , получаем соотношение $b = c$. Вместе с (2.3) это дает $c = a$, и, следовательно, группа абелева.

4. $C_4(A_4 + A_1) + (x^4)$. Рассмотрим кривую, заданную уравнением $x_0^2 x_1^2 - x_0(x_1^3 + 4x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2) + x_2^4 = 0$. Она имеет точку типа A_4 с координатами $(1 : 0 : 0)$ (касательная - $\{x_1 = 0\}$), изолированную точку типа A_1 с координатами $(1 : -4 : 2)$ и 3-кратную касательную $\{x_0 = 0\}$ (точка касания - $(0 : 1 : 0)$). Следовательно, вещественная часть кривой имеет вид, изображенный на рис. 2.11. Выберем в качестве L_0 3-кратную касательную, и в качестве центра проекции - точку касания O . Неособый слой L и особые слои L_1 , L_2 , L_3 показаны на рис. 2.11, выбор образующих

в группе слоя L - на рис. 2.5. Обнос слоя L вокруг особых слоев дает соотношения

$$L_1 : svsvs = vsvsv, \quad (2.4 \text{ а})$$

$$L_2 : a = b, \quad (2.4 \text{ б})$$

$$L_3 : [a, vsvs^{-1}v^{-1}] = 1 \quad (2.4 \text{ в})$$

Соотношение (2.4 в) с учетом (2.4 б) переписывается в виде $[v, svsv^{-1}] = [s^{-1}vs, v] = 1$. С другой стороны, из (2.4 а) следует, что $s = v^{-1}(s^{-1}vs)v(svsv^{-1})v^{-1}$, и, следовательно, $[s, v] = 1$ т.е. группа абелева.

5. $C_4(A_5)_+$ (х 4). Рассмотрим кривую, заданную аффинным уравнением $(x^2 - y)^2 = y^3$, или $x = \pm(y \pm y^{3/2})^{1/2}$ (см. рис. 2.12).

Бесконечно удаленная прямая является 3-кратной касательной к этой кривой. Выберем ее в качестве L_0 , а точку касания O - в качестве центра проекции. Слой L и особые слои (которые все вещественны) показаны на рис. 2.12, выбор образующих в слое L - на рис. 2.5. Обнося L вокруг особых слоев, получаем соотношения

$$L_1 : a = b, \quad (2.5 \text{ а})$$

$$L_2 : (vs)^3 = (sv)^3, \quad (2.5 \text{ б})$$

$$L_3 : s^{-1}v^{-1}svs = a. \quad (2.5 \text{ в})$$

Соотношение (2.5 в) с учетом (2.5 а) переписывается в виде $svs = vsv$, и (2.5 б) является, очевидно, следствием этого соотношения. Следовательно, полученная группа изоморфна группе кос B_3 .

6. Остальные кривые получаются возмущением кривых, абелевость групп которых доказана.

2.7. Кривые типа $C_4 + (x^2, x^2)$

1. $C_4(3A_2) + (x^2, x^2)$. Такая кривая изображена на рис.

2.13. Выберем в качестве L_0 двойную касательную (точки касания — мнимы), и в качестве центра проекции O — вещественную точку на ней. Слой L и особые слои L_i , которые все вещественны, изображены на рис. 2.13, выбор образующих a, b, c, d группы слоя L — на рис. 2.2. Обнося L вокруг особых слоев, получаем соотношения

$$\begin{aligned} L_1 : aba &= bab, \\ L_2 : cdc &= dcd, \\ L_3 : b &= c, \\ L_4 : avdv^{-1}a &= vdv^{-1}avdv^{-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Эта группа неабелева, она факторизуется до группы кос B_4 (введением дополнительного соотношения $[a, d] = 1$).

2. $C_4(2A_2 + A_1) + (x^2, x^2)$ и $C_4(2A_2) + (x^2, x^2)$.

Возмущая на рис. 2.13 точку u (то точки типа A_1 или полностью), получаем в дополнение к (2.6) соотношение $c = d$. В результате получаем группу B_3 .

3. $C_4(A_2 + 2A_1) + (x^2, x^2)$. Возмущая на рис. 2.13 точки u и v до точек типа A_1 , получаем дополнительные соотношения $a = b$ и $c = d$. Вместе с (2.6) они определяют абелеву группу.

4. Кривая типа $C_4(A_4 + A_1) + (x^2, x^2)$ получается возмущением кривой типа $C_4(A_4 + A_1) + (x^4)$ (см. п. 2.6.4).

5. $C_4(A_5) + (x^2, x^2)$. Рассмотрим кривую, заданную аффинным уравнением $x^4 - 2(y - y^2)x^2 + y^4 - 3y^3 + y^2 = 0$, или $x = \pm(y - y^2 \pm y^{3/2})^{1/2}$ (см. рис. 2.14). Бесконечно удаленная прямая является двойной касательной к этой кривой (точки касания — мнимые). Выберем ее в

качестве слоя L_0 , а точку $O = L_0 \cap \{x=0\}$ - в качестве центра проекции. Слой L и особые слои L_i (которые все вещественны) показаны на рис. 2.14, выбор образующих a, b, c, d - на рис. 2.2. В результате получаем следующие соотношения:

$$L_1 : a = bdb^{-1}, \quad (2.7 \text{ а})$$

$$L_2 : b = c, \quad (2.7 \text{ б})$$

$$L_3 : (cd)^3 = (dc)^3, \quad (2.7 \text{ в})$$

$$L_4 : d^{-1}c^{-1}dcd = b, \quad (2.7 \text{ г})$$

$$L_5 : a = d^{-1}cd. \quad (2.7 \text{ д})$$

Используя (2.7 б, д), выражаем элементы a и b через c и d . Подставляя эти выражения в остальные соотношения, получаем, что (2.7 г) равносильно (2.7 а), а (2.7 в) является их следствием. Соотношение (2.7 г) определяет группу кос B_3 .

6. Остальные кривые получаются возмущением кривых с абелевыми группами.

2.8. Другие кривые типа $C_4 + C_4$

1. $C_4(A_4 + A_2) + (x^3, xI)$. Выберем в качестве центра проекции точку перегиба O , лежащую на оси $\{x=0\}$, а в качестве слоя L_0 - бесконечно удаленную прямую, являющуюся касательной в точке O (см. рис. 2.15). Все особые слои L_i - вещественны (рис. 2.15). Соотношения имеют вид

$$L_1 : bcbcb = cbcb, \quad (2.8 \text{ а})$$

$$L_2 : a = b, \quad (2.8 \text{ б})$$

$$L_3 : abcvc^{-1}b^{-1}a = bcbcb^{-1}a bcbcb^{-1}. \quad (2.8 \text{ в})$$

Последнее соотношение с учетом (2.8 б) переписывается в виде

$$vsv^{-1}v = sv^{-1}vsv^{-1}. \quad (2.8 \text{ г})$$

Свойства группы, определяемой соотношениями (2.8 а, г), изучены в п. 3.4.

2. $C_4(A_4 + A_2) + (x_2, x_1, x_1)$. Возмущая рис. 2.15 до рис. 2.16, получаем дополнительное соотношение $\hat{b} = c$. Следовательно, группа этой кривой абелева.

3. $C_4(A_6) + (x_3, x_1)$. Кривая изображена на рис. 2.17, где касательная в точке перегиба (лежащей на вертикальной оси) - бесконечно удаленная прямая. Выберем в качестве L_0 эту касательную, а в качестве центра проекции - точку простого пересечения кривой и прямой L_0 . Слой L и особые слои показаны на рис. 2.16. Соотношения имеют вид

$$L_1 : \underline{vsv}v = \underline{svsv}c, \quad (2.9 \text{ а})$$

$$L_2 : a = b, \quad (2.9 \text{ б})$$

$$L_3 : [vsv^{-1}, v^{-1}v^{-1}avc] = 1. \quad (2.9 \text{ в})$$

Соотношение (2.9 в) с учетом (2.9 б) переписывается в виде $[vsv^{-1}, v^2c] = 1$, или $[c, vsv] = 1$. Из (2.9 а), используя перестановочность элемента c с подчеркнутыми вхождениями слова vsv , получаем $\hat{b} = c$. Следовательно, группа кривой абелева.

4. $C_4(3A_2) + (x_2, x_1, x_1)$. Кривая изображена на рис. 2.18, где показаны также центр проекции O (одна из точек возврата), слои L_0 и L и особые слои L_i , которые все вещественны. Обнос слоя L вокруг особых слоев дает соотношения:

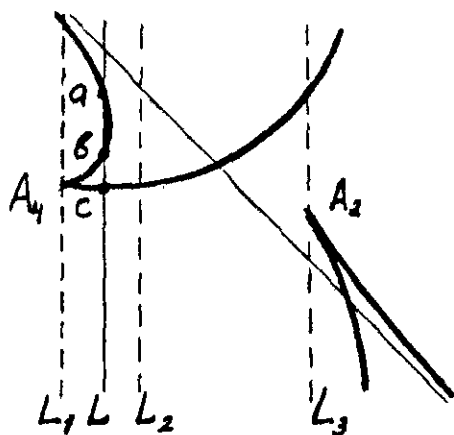


рис. 2.15.

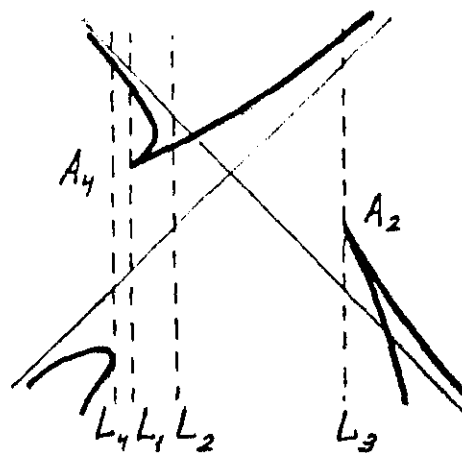


рис. 2.16.

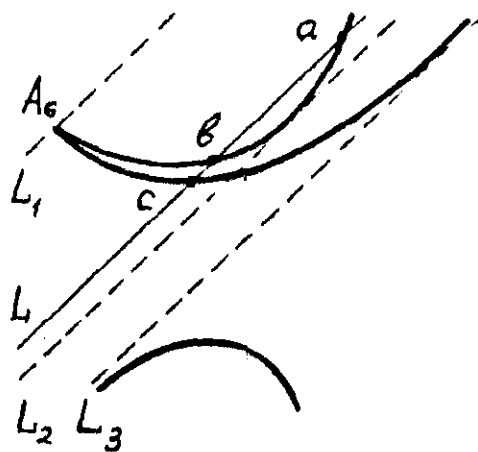


рис. 2.17.

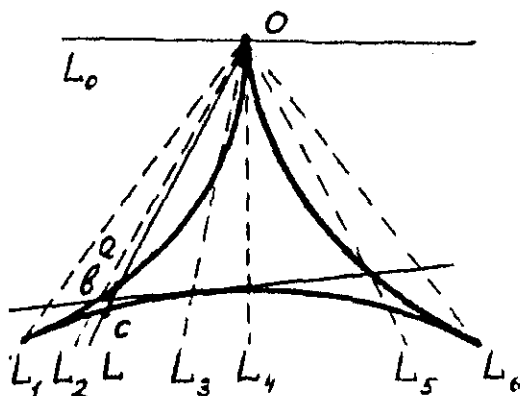


рис. 2.18.

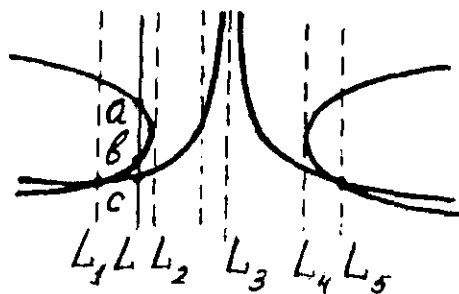


рис. 2.19.

$$L_1, L_6 : aca = cac, \quad (2.10 \text{ а})$$

$$L_2, L_5 : [a, b] = 1, \quad (2.10 \text{ б})$$

$$L_3 : (bc)^2 = (cb)^2, \quad (2.10 \text{ в})$$

$$L_4 : [a, (bc)^2] = 1. \quad (2.10 \text{ г})$$

Вклеивание прямой L_0 дает соотношение

$$(abc)^3 (bc)^2 = 1 \text{ или } \underline{abcabc} a = bc. \quad (2.10 \text{ д})$$

После замены подчеркнутого выражения на $bcac$ (в силу (2.10 б, а)) получаем $b = c^{-1} a^{-2} c^{-1}$. Остальные соотношения после подстановки этого выражения переписываются в одном из видов $[a, ca^2c] = 1$ или $[c, a^2ca^2] = 1$. Эти соотношения вытекают из (2.10 а), и, следовательно, группа кривой изоморфна группе кос B_3 .

5. $C_4(3A_2) + (xI, xI, xI, xI)$. Пусть на рис. 2.18 точка U распадается на пару точек простого пересечения. Тогда соотношение (2.10 в) заменяется на $[b, c] = 1$, или, с учетом выражения для b , на $[c, a^2] = 1$. Следовательно, группа кривой изоморфна группе $G_3(t+1)$ (см. п.3.1, 3).

6. Все остальные кривые получаются возмущением кривых, абелевость групп которых доказана.

2.9. Кривые типа $C_3 + C_2$

1. Если коника проходит через особую точку кубики, то группа кривой может быть вычислена с помощью предложения 1.3. Все эти группы абелевы.

2. Пусть кривая имеет символ $C_3 + (\rho_1, \dots)$ (см. гл. I, п.3.2). Если одно из чисел ρ_i не меньше 4, то группа кривой может быть вычислена методами, изложенными в п.1.5. (степень нечетна, случай

(а)). В результате получаем, что группа порождена элементами d_1 , d_2 , γ , и среди соотношений имеются следующие:

$$\gamma^{-1} d_1 \gamma = d_1 d_2 d_1^{-1},$$

$$\gamma^{-1} d_2 \gamma = d_1$$

$$\gamma^2 d_1 d_2 d_1 = 1.$$

Из последнего соотношения следует, что группа порождена элементами γ и $u = d_1 d_2$ ($d_1 = u^{-1} \gamma^{-2}$, $d_2 = \gamma^2 u^2$), и из первых двух соотношений следует, что $[\gamma, u] = 1$. Следовательно, все группы абелевы.

3. Из 2 по теореме Зариского следует абелевость группы всех кривых, кроме $C_3(A_2) + (x_3, x_3)$.

4. Кривая типа $C_3(A_2) + (3, 3)$ изображена на рис. 2.19. Выберем в качестве центра проекции точку возврата и в качестве слоя L_0 — бесконечно удаленную прямую. Слой L и особые слои L_i (которые все вещественны) изображены на рис. 2.19. Обнося L вокруг особых слоев, получаем соотношения

$$L_1 : (bc)^3 = (cb)^3, \quad (2.11 \text{ а})$$

$$L_2 : a = b, \quad (2.11 \text{ б})$$

$$L_3 : [c, (b^{-1}abc\,bc^{-1})^2] = 1, \quad (2.11 \text{ в})$$

$$L_4 : (abc\,bc\,b^{-1}\,c^{-1}\,b^{-1}\,abc\,bc^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,b^{-1}\,a^{-1} = b\,c\,b\,c^{-1}\,b^{-1}, \quad (2.11 \text{ г})$$

$$L_5 : (bc\,bc\,b^{-1}\,c^{-1}\,b^{-1}\,a)^3 = (abc\,bc\,b^{-1}\,c^{-1}\,b^{-1})^3. \quad (2.11 \text{ д})$$

Вклеивание слоя L_0 дает соотношение

$$(abc)^3 = (abc\,bc^{-1}\,b^{-1})^2. \quad (2.11 \text{ е})$$

Группа, заданная этими соотношениями, изучена в п. 3.5.

2.10. Кривые типа $C_3 + 2C_1$

1. $C_3(A_2) + (x_3) + (x_2, x_1)$. Кривая изображена на рис.2.20. Центр проекции - точка перегиба, слой L_0 - касательная в этой точке (бесконечно удаленная прямая). Соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} L_1 : aca &= cac, \\ L_2 : [b, c] &= 1, \\ L_3 : (ab)^2 &= (ba)^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

2. $C_3(A_2) + (x_3) + (x_1, x_1, x_1)$. Возмущая на рис. 2.20 прямую M , получаем дополнительное соотношение $[a, b] = 1$. Следовательно, группа изоморфна $\mathbb{Z} \oplus B_3$.

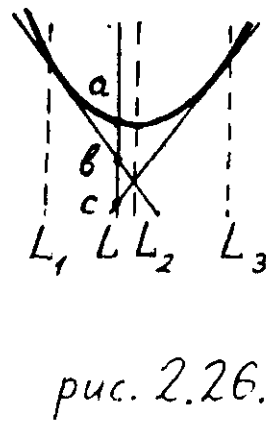
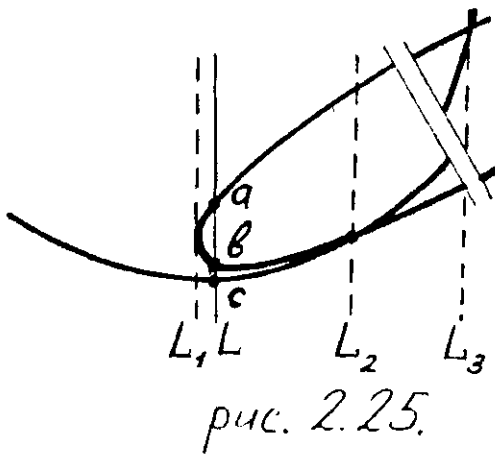
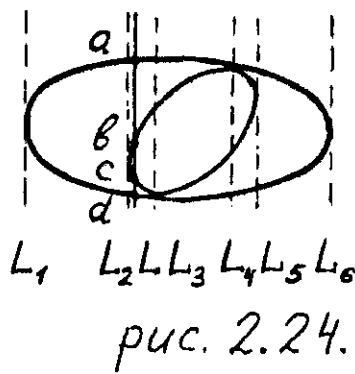
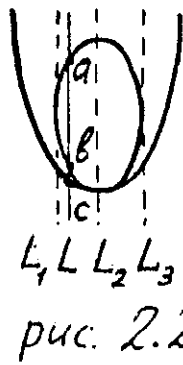
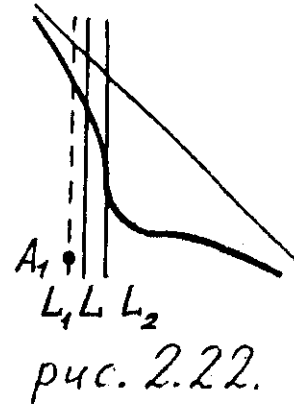
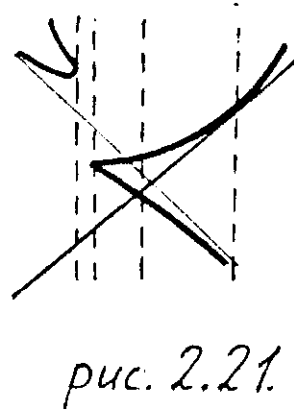
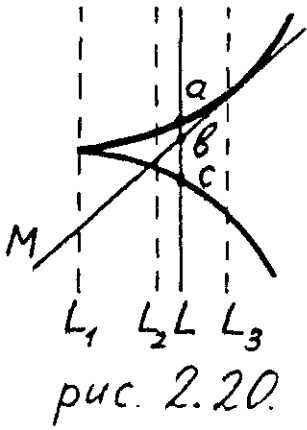
3. $C_3(A_2) + (x_2, x_1) + (x_2, x_1)$. Возмущая рис. 2.20 до рис. 2.21, получаем дополнительное соотношение $a = c$. Следовательно, группа абелева.

4. $C_3(A_1) + (x_3) + (x_3)$. Центр проекции - точка пересечения касательных, слой L_0 - одна из этих касательных (бесконечно удаленная прямая на рис. 2.22). Пусть a и b, c - классы петель, обходящих в слое L вокруг, соответственно, вещественной и двух мнимых точек пересечения L и кубики, а γ - класс петли, обходящей вокруг слоя L_2 . Соотношения имеют вид

$$L_1 : [b, c] = 1, \tag{2.13 а}$$

$$\left. \begin{aligned} L_2 : \gamma^{-1} a \gamma &= a b a^{-1}; \\ \gamma^{-1} b \gamma &= a c_2 a^{-1}; \\ \gamma^{-1} c \gamma &= a. \end{aligned} \right\} \tag{2.13 б}$$

Применяя к соотношению (2.13) автоморфизм $tr_{\gamma^{-1}}$, последовательно получаем $[a, b] = 1$ и $[a, c] = 1$. Следовательно, группа изоморфна $G(t^3 - 1)$.



5. $C_3(\phi) + (x_3) + (x_3)$. Возмущая на рис. 2.22 точку типа A_1 , получаем дополнительное соотношение $b=c$, которое после применения автоморфизма $t\tau_{\chi^{-1}}$ дает $a=b$. Следовательно, группа абелева.

6. $C_3(A_1) + (x_3) + (x_2, x_1)$. Возмущая на рис. 2.20 точку возврата до точки типа A_1 , получаем в дополнение к (2.12) соотношение $a=c$. Следовательно, группа абелева.

7. Остальные кривые получаются возмущением кривых с абелевыми группами.

2.II. Остальные кривые

1. Пусть кривая состоит из двух коник, имеющих точку 3-кратного касания или касающихся друг друга в двух точках, и прямой. Все такие кривые (имеющие лишь двойные точки), получаются возмущением кривой, рассмотренной в 2, и возмущаются до кривой, рассмотренной в 3. Так как группы обеих этих кривых изоморфны $T_{2,4}$, то таковы же и группы остальных кривых.

2. Пусть две коники имеют точку 3-кратного касания, и прямая L_0 (бесконечно удаленная прямая на рис. 2.23) касается одной из этих коник. Соотношения имеют вид

$$L_1 : a = b, \quad (2.14 \text{ а})$$

$$L_2 : (bc)^4 = (cb)^4, \quad (2.14 \text{ б})$$

$$L_3 : a = bcbcbcb^{-1}c^{-1}b^{-1}. \quad (2.14 \text{ в})$$

Соотношение (2.14 б) является, очевидно, следствием соотношений (2.14 а, в), которые определяют группу $T_{2,4}$.

3. Пусть две коники касаются друг друга в двух точках, и прямая L_0 (бесконечно удаленная прямая на рис. 2.24) транс-

версальна обоим коникам. Соотношения имеют вид

$$L_1 : a = cd c^{-1}, \quad (2.15 \text{ а})$$

$$L_2 : b = c, \quad (2.15 \text{ б})$$

$$L_3 : (cd)^2 = (dc)^2, \quad (2.15 \text{ в})$$

$$L_4 : (ab)^2 = (ba)^2, \quad (2.15 \text{ г})$$

$$L_5 : aba^{-1} = cdcd^{-1}c^{-1}, \quad (2.15 \text{ д})$$

$$L_6 : abab^{-1}a^{-1} = cdcdcd^{-1}d^{-1}c^{-1}. \quad (2.15 \text{ е})$$

Все соотношения являются, очевидно, следствием соотношений (2.15 а, б, в), которые определяют группу $T_{2,4}$.

4. Пусть две коники имеют точку 2-кратного касания, и прямая L_0 (бесконечно удаленная прямая на рис. 2.25) касается обоих коник. Соотношения имеют вид

$$L_1 : a = b \quad (2.16 \text{ а})$$

$$L_2 : (bc)^3 = (cb)^3, \quad (2.16 \text{ б})$$

$$L_3 : [a, bcbcb^{-1}c^{-1}b^{-1}] = 1 \quad (2.16 \text{ в})$$

В п. 3.6 показано, что эти соотношения определяют группу $\mathbb{Z} \oplus B_3$.

5. Если L_0 касается лишь одной коники, то к (2.16) добавляется соотношение $a = bcbcb^{-1}c^{-1}b^{-1}$, которое вместе с (2.16а) дает $[b, c] = 1$. Если коники имеют точку простого касания, то к (2.16) добавляется соотношение $[b, c] = 1$. Все остальные кривые типа $2C_2 + C_1$ получаются возмущением кривых с абелевыми группами.

6. Пусть кривая состоит из коники и трех касательных к ней (рис. 2.26). Соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} L_1 &: (ab)^2 = (ba)^2 \\ L_2 &: [b, c] = 1, \\ L_3 &: (ac)^2 = (ca)^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При возмущении одной или двух прямых (до трансверсального пересечения) к (2.17) добавляются, соответственно, соотношения $[a, b] = 1$, или $[a, b] = [a, c] = 1$. В первом случае получается группа $\mathbb{Z} \oplus T_{2,4}$, во втором - $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

§ 3. Исследование некоторых групп

3.1. Группы кривых, имеющих особую точку кратности

$$\underline{\deg C = 2}$$

Группы таких кривых могут быть вычислены с использованием предложения I.3. После исключения образующих Y_i , соответствующих неотмеченным парам и замены всех однотипных соотношений на одно (например, соотношения $[\alpha_1^{\rho_i}, \alpha_2] = 1$, $i = 1, \dots, k$, могут быть заменены одним соотношением $[\alpha_1^{\rho}, \alpha_2] = 1$, где $\rho = g.c.d.(\rho_1, \dots, \rho_k)$), задание группы может быть приведено к одному из следующих шести видов:

1) образующие α_1, α_2 удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_1^{\rho} = \alpha_2^{\rho}, \quad \rho \geq 0, \quad (3.1)$$

$$(\alpha_1 \alpha_2)^q \alpha_1 = \alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2)^q, \quad q \geq 0, \quad (3.2)$$

$$(\alpha_1 \alpha_2)^{\tau(2q+1)} = \alpha_1^{sp}, \quad m = 2\tau(2q+1) - sp \neq 0; \quad (3.3)$$

2) образующие α_1, α_2 , соотношения - (3.1, 3.2);

3) образующие α_1, α_2 и Y_1, \dots, Y_r , соотношения - (3.1,

3.2) и

$$\gamma_i^{-1} d_j \gamma_i = \sigma^{\nu_i} d_j, \quad i=1, \dots, d, \quad j=1, 2; \quad (3.4)$$

4) образующие d_1, d_2 , соотношения

$$[d_1^{\rho_1}, d_2] = [d_2^{\rho_2}, d_1] = 1, \quad \rho_1, \rho_2 \geq 0, \quad (3.5)$$

$$(d_1 d_2)^q = (d_2 d_1)^q, \quad q \geq 0, \quad (3.6)$$

$$(d_1 d_2)^{\nu q} = d_1^{s_1 \rho_1} d_2^{s_2 \rho_2}, \quad m = 2\nu q - s_1 \rho_1 - s_2 \rho_2 \neq 0; \quad (3.7)$$

5) образующие d_1, d_2 , соотношения - (3.5, 3.6);

6) образующие $d_1, d_2, \gamma_1, \dots, \gamma_d$, соотношения - (3.5, 3.6) и (3.4).

Параметр m в соотношениях (3.3) и (3.7) равен, как легко видеть, степени кривой.

Ниже перечислены некоторые свойства групп, получаемых таким образом.

1. Группа с заданием (3) представляется в виде $G \oplus F_d$, где G - группа с заданием (2), имеющем те же параметры. Аналогичное утверждение справедливо и для группы с заданием (6), если все ν_i четны. В противном случае можно положить $\nu_1 = 1, \nu_i = 0$ при $i \geq 2$. Все утверждения следуют из того, что σ^2 является внутренним автоморфизмом группы $\langle d_1, d_2 \rangle$, а если d_1 и d_2 удовлетворяют соотношению (3.2), то и σ является внутренним автоморфизмом.

2. Пусть G и \bar{G} - группы с заданиями (4) и (5) соответственно. Группа \bar{G} не изменяется при перестановке набора значений (ρ_1, ρ_2, q) . Группа G не изменяется при одновременной перестановке наборов значений (ρ_1, ρ_2, q) и (s_1, s_2, ν) . Кроме

того, при фиксированных (ρ_1, ρ_2, q) группа G не изменяется при преобразованиях вида $(S_1, S_2, \tau) \mapsto (S_1, S_2 \pm S_1, \rho_1 \pm \tau q)$, а если одно из этих чисел (например, q) равно нулю, то и при преобразованиях вида $(S_1, S_2) \mapsto (\pm S_1, \pm S_2)$. (Так, например, для группы кривой типа $C_4(E_6) + (x^2, x^2)$ предложение 1.3 доставляет задание $\langle d_1, d_2 \mid [d_1^3, d_2] = 1, (d_1 d_2)^2 = (d_2 d_1)^2, (d_1 d_2)^4 = d_1^3 \rangle$.

Эта группа изоморфна группе кос $B_3 = T_{2,3}$. Первое утверждение доказывается с помощью замен образующих вида $d_1 = \beta_1 \beta_2$, $d_2 = \beta_2^{-1}$, второе - с помощью замен вида $d_1 = \beta_1 \beta_2^{\pm q_2}$, $d_2 = \beta_2$, третье - с помощью замен $d_1 = \beta_1^{\pm 1}$, $d_2 = \beta_2^{\pm 1}$.

3. Пусть G и \bar{G} - группы с заданиями (1) и (2) соответственно. Тогда:

- если $\rho \neq 0$, то $K(G) = K(\bar{G}) = K(\rho[2q+1]\rho) = K(2[4q+2]\rho)$.

(см. обозначения в [16]). Следовательно, коммутант равен $\{1\}$ лишь при $\rho = 1$ или $q = 0$, и коммутант конечен лишь при значениях (ρ, q) , указанных в табл. 3.1;

- если $\rho = 0$, то $\bar{G} \cong T_{2, 2q+1}$, и $K(G) = K(\bar{G}) = F_{2q}$;

- если $q.c.d.(\rho, 4q+2) = 1$, то $\bar{G} \cong \mathbb{Z} \oplus K(\bar{G})$;

- если $\rho = 2$, то $\bar{G} \cong G_{2\rho+1}(t+1)$, и имеется расщепляющаяся

точная последовательность

$$\{1\} \rightarrow \mathbb{Z}_{2\rho+1} [\mathbb{Z}] / (t+1) \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow \{1\}.$$

Последнее утверждение доказывается прямым вычислением, остальные вытекают из сформулированного ниже предложения 3.1.

4. Пусть G и \bar{G} - группы с заданиями (4) и (5) соответ-

ственно. Тогда:

- если $\rho_1, \rho_2, q \neq 0$, то $K(G) = K(\bar{G}) = K(\rho_1 [2q] \rho_2)$.

Следовательно, коммутант равен $\{1\}$ лишь тогда, когда одно из этих чисел равно 1, и конечен лишь при наборах значений (ρ_1, ρ_2, q) , указанных в табл. 3.2;

- если $q = 0$, то $K(G) = K(\bar{G}) = F_{(\rho_1-1)(\rho_2-1)}$.

Если, кроме того, $g.c.d.(\rho_1, \rho_2) = 1$, то $\bar{G} \cong \mathbb{Z} \oplus T_{\rho_1, \rho_2}$;

- если $\rho_1 = \rho_2 = 0$, и $q > 1$, то $K(G) = K(\bar{G}) = F_\infty$;

- если числа ρ_1, ρ_2, q попарно взаимно просты, то $\bar{G} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus K(\bar{G})$. Если, кроме того,

$g.c.d.(\tau q - s_1 \rho_1, \tau q - s_2 \rho_2) = 1$, то $G = \mathbb{Z} \oplus K(G)$;

- если $(\rho_1, \rho_2, q) = (2, 2, q)$, то имеется точная последовательность

$$\{1\} \rightarrow \mathbb{Z} [\mathbb{Z}_2] / q(t+1) \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \{1\}.$$

В частности, при $q = 0$ имеем $G = G(t^2 - 1)$.

Последнее утверждение доказывается прямым вычислением, остальные вытекают из предложения 3.1.

Таблица 3.1

ρ	q	$K(G)$	$ord K(G)$
2	q	\mathbb{Z}_{2q+1}	$2q+1$
3	1	$\langle 2, 2, 2 \rangle$	8
3	2	$\langle 2, 3, 5 \rangle$	120
4	1	$\langle 2, 3, 3 \rangle$	24
5	1	$\langle 2, 3, 5 \rangle$	120

Таблица 3.2

ρ_1, ρ_2, q	$K(G)$	$ord K(G)$
$(2, 2, q)$	\mathbb{Z}_q	q
$(2, 3, 3)$	$\langle 2, 2, 2 \rangle$	8
$(2, 3, 4)$	$\langle 2, 3, 3 \rangle$	24
$(2, 3, 5)$	$\langle 2, 3, 5 \rangle$	120

Предложение 3.1. 1) Пусть $H \subset G$ - центральная подгруппа, мономорфно отображающаяся в $G/K(G)$. Тогда $K(G) \cong K(G/H)$. Кроме того, если образ группы H в $G/K(G)$ является прямым слагаемым, то $G \cong H \oplus G/H$.

2) Пусть подгруппа $G' \subset G$ такова, что естественное отображение $G'/K(G') \rightarrow G/K(G)$ мономорфно. Тогда $K(G) \cong K(G')$.

Доказательство очевидно.

3.2. Группа кривой типа $C_5(3A_4)$

Рассмотрим группу G , порожденную элементами a, b, c, d , удовлетворяющими соотношениям (2.1 а-з) (см. п.2.3). Из (2.1 а) и (2.1 з) находим $c = b^{-1}a^{-1}$, $d = ab^2$. Подставляя эти выражения в (2.1 г) и (2.1 б) (из последнего соотношения исключен элемент δ), получаем, соответственно,

$$ab^4a = b, \quad (3.8 \text{ а})$$

$$bab = (ab^2a)^2. \quad (3.8 \text{ б})$$

Докажем, что остальные соотношения являются следствием этих. Импликация (2.1 з) \Rightarrow (2.1 в) очевидна. (2.1 д) после подстановки дает $[bab, ab^2a] = 1$, и является поэтому следствием из (3.8 б). Подставляя выражения для c и d в (2.1 е), находим $[a, \underline{bab} a^{-1} b^{-2} a^{-1} b^{-1} ab^2] = 1$. Заменяя подчеркнутое выражение на $(ab^2a)^2$, получаем соотношение $[a, b^2 a b^{-1} ab^2] = 1$, которое в силу (3.8 а) является тавтологией. Наконец, (2.1 ж) после подстановки дает

$$ab^2 \underline{bab} a^{-1} b^{-2} a^{-1} b^{-1} ab^2 abab^2 a = \underline{bab} a^{-1} b^{-2} a^{-1} b^{-1} (ab^2a)(bab).$$

Переставляя выражения, заключенные в скобки, и заменяя подчеркнутые под слова на $(ab^2a)^2$, после сокращения получаем $v^2av^{-1}av^2=1$, что равносильно (3.8 а).

Переписав (3.8 б) в виде $vab = \underline{av^2a^2v^2a}$ и заменив av^2 на $va^{-1}v^{-2}$ и v^2a на $v^{-2}a^{-1}v$, получим равносильное (при наличии 3.8 а)) соотношение

$$a^2 = v^2a^3v^2. \quad (3.8 в)$$

Вычислим коммутант K этой группы. Применяя метод Шрайера (см., например, [17]), находим, что группа K порождена элементами $\beta_i = a^i v a^{-i-1}$, $i = 0, \dots, 4$, и $\alpha = a^5$. Переписывая соотношения (3.8 а, в) в этих образующих, получаем

$$\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \alpha = \beta_0, \quad (3.9 а)$$

$$(\beta_0 \beta_1)^2 = \alpha^{-1}. \quad (3.9 б)$$

Кроме того, если в группе K выполнено некоторое соотношение, то выполнено и соотношение, полученное из него применением автоморфизма T , индуцированного сопряжением tr_a . В частности, выполнено соотношение $(\beta_3 \beta_4)^2 = \alpha^{-1}$, которое вместе с (3.9 а, б) влечет $[\alpha, \beta_0] = 1$. Применяя T , получаем $[\alpha, \beta_i] = 1$, и, следовательно, α лежит в центре группы K . Из (3.9 а) и из соотношения, полученного из него применением T^{-1} , получаем $\beta_1^{-1} \beta_0 = \beta_2 \beta_3 \beta_4 \alpha$, и $\beta_1 \beta_0^{-1} = \beta_2 \beta_3 \beta_4 \alpha$, откуда следует, что $\beta_0^2 = \beta_1^2$. Следовательно, $\beta_i^2 = const$. Обозначим этот элемент (лежащий, очевидно, в центре) через q .

Полученные соотношения позволяют переставлять образующие β_i и β_{i+1} , умножая при этом все выражение на некоторые степени элементов α и q . В частности, находим $[\beta_i, \beta_{i+1}] = q^{-2} \alpha^{-1}$.

Применяя к (3.9 а) преобразование T^{-2} и умножая полученное выражение на (3.9 а), находим

$$\beta_0 \beta_2 = \beta_1 \beta_2 (\beta_3 \beta_4 \alpha \beta_3 \beta_4) \beta_0 \beta_1 \alpha = (\beta_1 \beta_2) (\beta_0 \beta_1) \alpha.$$

Переставляя элементы в каждой скобке, получаем $\beta_0 \beta_2 = \beta_2 \beta_0 q^{-3} \alpha^{-1}$, откуда (применяя T), находим $[\beta_i, \beta_{i+2}] = q^{-3} \alpha^{-1}$.

Таким образом, $K'(G)$ лежит в центре группы G и порожден элементами α и q . Выражая из (3.9 а) β_0 через β_1, \dots, β_4 и подставляя в остальные соотношения, находим $\alpha^2 = q^2 = 1$.

Окончательно получаем:

- $G/K(G) \cong \mathbb{Z}_5$;

- $K(G)/K'(G) \cong \mathbb{Z}_2 [Z]/(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)$;

- $K'(G) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и лежит в центре группы G ;

- $\text{ord } G = 5 \cdot 2^6 = 320$.

3.3. Группа кривой типа $C_5(A_6 + 3A_2)$

Рассмотрим группу G , порожденную элементами a, b, c , удовлетворяющими соотношениям (2.2 а-е) (см. п. 2.4; из соотношения (2.2 д) необходимо исключить δ). Положим $a = \bar{b} \bar{c} \bar{a} \bar{c}^{-1} \bar{b}^{-1}$, $b = \bar{b}$, $c = \bar{c}$. Тогда из (2.2 д) следует, что $\bar{b} = \bar{c} \bar{a} \bar{c} \bar{a}$, и следовательно, элементы $u = \bar{c}^{-1}$ и $v = \bar{c} \bar{a}$ порождают группу G . Имеем $a = v^3 u v^2$, $b = v^2$, $c = v^{-1}$. Подставляя эти соотношения в (2.2 а) и в (2.2 е), получим, соответственно,

$$u v^3 u = v^2 u v^2, \tag{3.10 а}$$

$$u v^5 u = v^2. \tag{3.10 б}$$

Перепишывая (3.10а) в виде $v^3 = \underline{u^{-1}v^2} \cdot u \cdot \underline{v^2u^{-1}}$ и заменяя одно или оба подчеркнутых выражения с использованием (3.10б), получаем соотношения

$$v^2 u^2 v^2 = u, \quad (3.10в)$$

$$u^3 v^7 = 1, \quad (3.10г)$$

которые равносильны (3.10а) при наличии (3.10б). Докажем, что все остальные соотношения являются следствиями этих. (2.2б) переписывается в виде $\underline{v^{-2}u} \underline{v^3} = \underline{u^{-1}v^3} \underline{u} \underline{v^{-2}u}$. Заменяя подчеркнутые слова на выражения, полученные из (3.10а), получим $[u^3, v^2] = 1$. Это следует из (3.10г). Соотношение (2.2в) переписывается в виде

$\underline{u^{-1}v^3} \underline{u} \underline{v^{-2}u} \underline{v^2} \underline{u^{-1}v^3} \underline{u} \underline{v^{-2}u} \underline{v^{-2}} = v^2 u^{-1} \underline{v^3} \underline{u} \underline{v^{-2}u}$. Заменяя подчеркнутые выражения на $u^{-1}v^2u$ (используя (3.10а)), получим

$\underline{u^{-2}v^2} \underline{u^2} \underline{v^2} \underline{u^{-2}v^2} \underline{u^2} \underline{v^{-2}} = v^2 u^{-2} \underline{v^2} \underline{u^2}$. Заменяя подчеркнутые выражения на $u v^{-2}$ (по (3.10в)), получим соотношение $[u^3, v^2] = 1$,

являющееся следствием из (2.10г). Наконец, (2.2г) может быть записано в виде $\underline{u^{-1}v^5} \underline{v^{-2}u} \underline{v^{-2}u^{-1}v^3} \underline{u} \underline{v^{-2}} = \underline{v^3} \underline{u} \underline{v^{-2}u^{-1}v^3} \underline{u} \underline{v^{-2}u^{-1}}$.

После замены подчеркнутых слов их выражениями из (3.10в) и (3.10а) соответственно оно приводится к (3.10б).

Легко видеть, что при наличии (3.10г) соотношение (3.10б) равносильно соотношению $(u v^{-2})^2 = u^3$. Поэтому, заменив v на v^{-1} , получим для группы G задание $\langle u, v \mid u^3 = v^7 = (u v^2)^2 \rangle$. Отсюда видно, что эта группа бесконечна, и, следовательно, неабелева. Действительно, при добавлении соотношения $u^3 = 1$ группа G факторизуется до группы $(2, 3, 7)$, которая бесконечна (см. [16], п.6.4).

3.4. Группа кривой типа $C_4(A_4 + A_2) + (x3, x1)$

Рассмотрим группу G , порожденную элементами b, c , удовлетворяющими соотношениям (2.8 а, г) (см. п. 2.8). После введения новых образующих $u = bc$, $v = bcbcb$ эти соотношения

переписываются в виде

$$u^5 = v^2, \quad (3.11 \text{ а})$$

$$u^2 = vu\bar{v}^{-1}u\bar{v}^{-1}u^2vu^{-1}\bar{v}^{-1}u^{-1}v. \quad (3.11 \text{ б})$$

Профакторизуем группу G по центральному элементу v^2 . Соотношение (3.11 б) переписется при этом в виде $[(vu)^3, u^2] = 1$, равносильном (при наличии соотношения $u^5 = 1$) соотношению $(uv)^3 = (vu)^3$. Следовательно, факторгруппа \bar{G} изоморфна группе $2[6]5 \cong \langle 2, 3, 5 \rangle_2 \oplus \mathbb{Z}_5$ (см. [16]).

Из предложения 3.1 следует, что $K(G) \cong K(\bar{G}) \cong \langle 2, 3, 5 \rangle$.

С другой стороны, из результатов [16] следует, что группа $\mathbb{Z}_{10} \cong \bar{G} / K(\bar{G})$ порождена классом центрального элемента \bar{z} порядка 20. Рассмотрим подгруппу $H \subset G$, порожденную элементом $w = u^5$ и некоторым прообразом z элемента \bar{z} . Это абелева группа, имеющая задание вида $(w, z \mid 20z = 2pw)$. Для любого элемента $g \in G$ автоморфизм $tr_g: H \rightarrow H$ должен факторизоваться до тождественного автоморфизма группы $H/(w)$. Из этого и из того, что $tr_g w = w$, следует, что tr_g — тождественный автоморфизм, т.е. подгруппа H центральна. Применяя предложение 3.1 к центральной подгруппе, порожденной элементом z , получаем разложение в прямую сумму $G = \mathbb{Z} \oplus \langle 2, 3, 5 \rangle$.

3.5. Группа кривой типа $C_3(A_2) + (3, 3)$

Рассмотрим группу G , порожденную элементами a, b, c , удовлетворяющими соотношениям (2.11 а-е). Используя (2.11 б), исключим элемент a . Введем новые образующие u, v так, что $b = uvu$, $c = v^{-1}u^{-1}$. Соотношение (2.11 а) переписется

в виде

$$[u^3, v] = 1. \quad (3.12 \text{ а})$$

С учетом этого (2.II е) переписывается в виде

$$vu^2 = uv^2, \text{ или } v^2u = u^2v \quad (3.12 \text{ б})$$

(2.II в) с учетом (3.12 а) дает $vu^2v^2u = u^2v^2uv$, и является,

очевидно, следствием из (3.12 б). Соотношение (2.II г) дает

$$uvuv = \underline{vu^2} v^{-1} u^{-1} \underline{v^2u} \quad . \text{ Заменяя подчеркнутые слова их}$$

выражениями из (3.12 б), получаем тождество. Наконец, (2.II г)

дает $(\underline{vu^2} v^{-1} u^{-1})^3 = (v^{-1} u^{-1} \underline{vu^2})$. Заменяя подчеркнутые слова их вы-

ражениями из (3.12 б), получаем $[v^3, u] = 1$. Это соотношение сле-

дует из (3.12 а, б) - достаточно перемножить крест на крест чле-

ны равенства $vu^2 = uv^2$ и воспользоваться перестановочностью

элемента u^3 . Таким образом, группа G определяется соотноше-

ниями (3.12 а, б).

Вычислим коммутант этой группы. Он порожден элементами

$$d_i = u^i v u^{-i-1} \quad (\text{см. [I7]}). \text{ Из (3.12 а) следует, что } d_{i+3} = d_i,$$

а из (3.12 б) получаем соотношения $d_0 d_1 = d_2$, $d_1 d_2 = d_0$,

$$d_2 d_0 = d_1, \text{ которые можно переписать в виде } d_0^2 = d_1^2 = d_2^2 = d_0 d_1 d_2.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$- G/K(G) \cong \mathbb{Z};$$

$$- K(G) \cong \langle 2, 2, 2 \rangle \text{ (группа кватернионов, см. [I6]), и}$$

автоморфизм τ_u действует на $K(G)$ как перестановка обра-
зующих (d_0, d_1, d_2) ;

$$- K(G)/K'(G) \cong \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}]/(t^2 + t + 1);$$

$$- K'(G) \cong \mathbb{Z}_2 \text{ и лежит в центре.}$$

3.6. Группа одной кривой типа $2C_2 + C_1$ (п.2.II, 4)

Рассмотрим группу G , порожденную элементами b, c , удовлетворяющими соотношениям (2.16 б, в), из которых исключен элемент a . Рассмотрим элемент $x = cbc^{-1}b^{-1} \in G$. Из (2.16 в) имеем $[b, x] = 1$. Из того же соотношения получаем $[c, c^{-1}b^{-1}c^{-1}bc] = 1$, и, используя вытекающую из (2.16 б) перестановочность элементов bc и cb , получаем $[c, x] = 1$. Применяя к подгруппе H , порожденной центральным элементом x , предложение 3.1, получим разложение $G = Z \oplus B_3$.

ГЛАВА III. МНОГОЧЛЕН АЛЕКСАНДЕРА ПРОЕКТИВНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Введение

0.1. Обзор известных результатов

Теорема 0.1 (О.Зариский, см. [49, 52]).

Пусть V - плоская проективная неприводимая алгебраическая кривая степени m , все особые точки которой - типов A_1 и A_2 .

Тогда :

1) Если m не кратно 6, то $\Delta_V(t) = 1$.

2) Если $m = 6k$, то $\Delta_V(t) = (t^2 - t + 1)^\delta$, где δ - сверх избыточность линейной системы кривых степени $5k - 3$, проходящих через точки возврата кривой V .

Этот результат является единственным известным автору примером непосредственного вычисления многочлена Александера кривой без предварительного вычисления ее фундаментальной группы.

Теорема 0.2 (О.Зариский, см. [52]). Пусть ρ - простое число, и $\xi^{\rho^d} = 1$. Тогда многочлен Александера любой неприводимой кривой не имеет делителей $(t - \xi)$.

В связи с теоремой 0.2 следует отметить результаты де Франчиса [29] и А.Комессати [25], давших полное описание чисел Бетти соответственно 2- и 3- листового накрывающего пространства через количество неприводимых компонент множества ветвления.

Систематическое изучение многочлена Александера проективных гиперповерхностей было начато Либгобером [37 - 40]. В [37 - 39] вычислены многочлены Александера некоторых кривых по известным фундаментальным группам. Там же получены верхние оценки в терминах набора особенностей кривой.

Теорема 0.3 (А.Либгобер, см. [37]). Пусть V - плоская

проективная кривая степени m . Тогда

1) $\Delta_V(t)$ делит произведение характеристических многочленов монодромий всей особых точек кривой V .

2) $\Delta_V(t)$ делит многочлен $(t^m - 1)^{m-2}(t-1)$.

В [40] изучена первая нетривиальная гомотопическая группа $\pi_k(\mathbb{C}P^n \setminus V)$ дополнения гиперповерхности $V \subset \mathbb{C}P^n$. Там же имеются верхние оценки на $\mathbb{Q}[H_1(\mathbb{C}P^n \setminus V)]$ -модуль $\pi_k(\mathbb{C}P^n \setminus V) \otimes \mathbb{Q}$, аналогичные соответствующим оценкам для кривых, и, в частных случаях, нижние оценки в алгебро-геометрических терминах.

0.2. Обозначения.

1. Для любого топологического пространства X через \mathbb{C}_X обозначается постоянный пучок на X со слоем \mathbb{C} . Для топологической пары (X, A) положим $\mathbb{C}_{X,A} = \text{Ker}[\mathbb{C}_X \xrightarrow{i^*} i_* \mathbb{C}_A]$, где $i: A \hookrightarrow X$ - включение. Очевидно, что $H^i(X; \mathbb{C}_{X,A}) = H^i(X, A; \mathbb{C})$.

2. Слой пучка \mathcal{F} на X в точке $x \in X$ обозначается через \mathcal{F}_x или через $S_x \mathcal{F}$.

3. Будем отождествлять голоморфное линейное расслоение на аналитическом многообразии X и соответствующий ему класс в группе $H^1(X; \mathbb{C}_\omega^*)$, где \mathbb{C}_ω^* - пучок ростков голоморфных функций на X , не обращающихся в ноль. Для любого класса $E \in H^1(X; \mathbb{C}_\omega^*)$ через $\mathcal{O}(X; E)$ обозначается пучок ростков голоморфных сечений расслоения E .

4. Пусть X есть n -мерное комплексное аналитическое многообразие. Тогда $\mathcal{O}^\circ(X)$ - комплекс пучков голоморфных дифференциальных форм на X ; $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}^\circ(X)$ - структурный пучок на X ;

$\omega_X = \mathcal{O}^n(X)$ - канонический пучок на X ; K_X - канонический класс, т.е. $\omega_X = \mathcal{O}(X; K_X)$.

5. Пусть F - дивизор на аналитическом многообразии X . Представим его в виде линейной комбинации попарно различных неприводимых компонент: $F = \sum \rho_d F_d$. Положим:

- $[F] \in H^1(X; \mathbb{C}_\omega^*)$ - класс дивизора F ;

- $\text{red } F = \sum F_d$ - сумма всех компонент дивизора F , взятых с кратностью 1 ;

- если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то $\alpha F = \sum [\alpha \rho_d] F_d$, где $[\alpha]$ - целая часть числа α .

§ I. Смешанные структуры Ходжа

I.1. Комплексы $\mathcal{Q}^\bullet(X)$ и $\mathcal{Q}^\bullet(X \setminus F)$

Пусть X - кэлерово многообразие. Тогда комплекс $\mathcal{Q}^\bullet(X)$ является резольвентой постоянного пучка \mathbb{C}_X . Известно (см., например, [20]), что $\mathcal{Q}^\bullet(X)$ является когомологическим комплексом Ходжа (см. определение в [26]), причем ходжева фильтрация совпадает с простой фильтрацией (la filtration bête в [26]) этого комплекса.

Пусть F - дивизор на X с нормальными пересечениями, и $j: X \setminus F \hookrightarrow X$ - включение. В [26] построена резольвента $Rj_* \mathbb{C}_{X \setminus F} \rightarrow \mathcal{Q}^\bullet(X \setminus F)$, и доказано, что комплекс $\mathcal{Q}^\bullet(X \setminus F)$, будучи снабженным простой фильтрацией и некоторой весовой фильтрацией, становится когомологическим смешанным комплексом Ходжа.

Из общих результатов работы [26] следует, что если в ко-

гомологическом смешанном комплексе Ходжа \mathcal{E}^\bullet на X ходжева фильтрация совпадает с простой, то имеется канонический изоморфизм $gr_F H^m(\mathcal{E}^\bullet) = \sum_{p+q=m} H^p(X; \mathcal{E}^q)$. Это позволяет вычислять когомологии $H^i(X; \mathbb{C})$ и $H^i(X \setminus F; \mathbb{C})$ через когомологии когерентных аналитических пучков.

1.2. Комплексы $\mathcal{Q}^\bullet(F)$ и $\mathcal{Q}^\bullet(X, F)$

Пусть F - дивизор с нормальными пересечениями на кэлеровом многообразии X . Определим последовательность подпространств $F^{(i)} \subset X$, положив $F^{(0)} = F$ и $F^{(i)} = \text{Sing } F^{(i-1)}$ при $i > 0$. Пусть $\bar{F}^{(i)}$ - нормализация пространства $F^{(i)}$. Тогда очевидная точная последовательность ходжевых резольвент

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C} : & \mathcal{C}_{F^{(0)}} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{F^{(1)}} & \longrightarrow & \dots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ \mathcal{Q} : & \mathcal{Q}^\bullet(\bar{F}^{(0)}) & \longrightarrow & \mathcal{Q}^\bullet(\bar{F}^{(1)}) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

определяет резольвенту $\mathcal{Q}^\bullet(F) = \mathcal{H}^0(\mathcal{Q}^\bullet)$ пучка $\mathcal{C}_F = \mathcal{H}^0(\mathcal{C})$.

По теореме 8.I.15 [26] комплекс $\mathcal{Q}^\bullet(F)$ является когомологическим смешанным комплексом Ходжа, причем ходжева фильтрация в нем совпадает с простой.

Включение $i: F \hookrightarrow X$ индуцирует эпиморфизм резольвент

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_X & \longrightarrow & i_* \mathcal{C}_F & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{Q}^\bullet(X) & \xrightarrow{i^*} & i_* \mathcal{Q}^\bullet(F) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Это позволяет определить резольвенту $\mathcal{Q}^\bullet(X, F) = \text{Ker } i^*$ пучка

$\mathcal{C}_{X, F}$, которая, по теореме 8.I.15 [26] является когомологическим смешанным комплексом Ходжа (ходжева фильтрация совпадает с

простой). Если f - росток, задающий дивизор F в точке $x \in X$, то слой $S_x \mathcal{O}'(X, F)$ состоит из ростков вида $f\omega$, где $\omega \in S_x \mathcal{O}'(X \setminus F)$. Следовательно, имеется естественный изоморфизм

$$\mathcal{O}'(X \setminus F) \otimes \mathcal{O}(X; [-F]) \cong \mathcal{O}'(X, F). \quad (I.1)$$

Замечание I.1. Все описанные конструкции имеют, очевидно, смысл и в том случае, когда не F , а $\text{red } F$ имеет нормальные пересечения. В этом случае положим по определению $\mathcal{O}'(F) = \mathcal{O}'(\text{red } F)$, $\mathcal{O}'(X, F) = \mathcal{O}'(X, \text{red } F)$ и т.д.

I.3. Другие комплексы

Пусть F_1 и F_2 - такие дивизоры, что $\text{red } F_1$, $\text{red } F_2$ и $\text{red}(F_1 + F_2)$ имеют нормальные пересечения.

Тогда, комбинируя описанные выше конструкции и применяя теорему 8.1.15 [26], можно построить комплексы, определяющие смешанную структуру Ходжа в когомологиях топологических пар, полученных с помощью взятия дополнения и релятивизации из пространств типа X , F_i и $\partial T_{F_1}(F_2)$, где через $\partial T_{F_1}(F_2)$ обозначена граница регулярной окрестности множества $F_1 \cap F_2$ в F_1 . Ходжевой во всех случаях является простая фильтрация комплекса. Эти комплексы связаны многими точными последовательностями, имеющими место для когомологий соответствующих пространств:

- последовательности пары и тройки:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}'(F_1 + F_2, F_2) \rightarrow \mathcal{O}'(F_1 + F_2) \rightarrow i_{*} \mathcal{O}'(F_2) \rightarrow 0, \quad (I.2)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}'(X, F_1 + F_2) \rightarrow \mathcal{O}'(X, F_2) \rightarrow i_{*} \mathcal{O}'(F_1 + F_2, F_2) \rightarrow 0; \quad (I.3)$$

- определение пучков $\partial T_X(F)$ и $\partial T_{F_1}(F_2)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X, F) \rightarrow \mathcal{O}(X \setminus F) \rightarrow i_{*} \mathcal{O}(\partial T_X(F)) \rightarrow 0, \quad (I.4)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(F_1 + F_2, F_2) \rightarrow \mathcal{O}((F_1 + F_2) \setminus F_2) \rightarrow i_{*} \mathcal{O}(\partial T_{F_1}(F_2)); \quad (I.5)$$

- последовательность Тома (дивизор F неособый):

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X \setminus F) \rightarrow i_{*} \mathcal{O}^{-1}(F) \rightarrow 0.$$

Отметим, кроме того, очевидные изоморфизмы

$$\mathcal{O}^0(X \setminus F) = \mathcal{O}^0(X) = \mathcal{O}_X, \quad \text{и} \quad \mathcal{O}^n(X, F) = \mathcal{O}^n(X) = \omega_X,$$

(где $n = \dim X$), и мономорфизмы $\alpha = \wedge \frac{df}{f}$ и $\beta = d \circ i_n$:

$$i_{*} \mathcal{O}(F_1, F_1 \cap F_2) \xrightarrow{i_n} i_{*} \mathcal{O}(F_1 \setminus F_1 \cap F_2) \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^{+1}(X \setminus F_2) \otimes \mathcal{O}(X; [F_1]) / \mathcal{O}^{+1}(X \setminus F_2) \quad (I.6)$$

(дивизор F_1 предполагается неособым).

§ 2. Циклические разветвленные накрытия

2.1. Класс накрытия

Пусть X - аналитическое многообразие, и F - дивизор на X . Пусть $\rho: X_N \rightarrow X \setminus F$ есть N -листное циклическое накрытие. Будем говорить, что ρ имеет ветвление вдоль F , если у любой точки $x \in X$ существует такая окрестность \mathcal{U} , что сужение $\rho|_{\rho^{-1}(\mathcal{U} \setminus F)}$ гомеоморфно сужению проекции $\rho: \mathcal{U} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{U}$ на множество $\{(x, \xi) \in (\mathcal{U} \setminus F) \times \mathbb{C} \mid \xi^N = f(x)\}$, где f - сечение, задающее дивизор F в окрестности \mathcal{U} .

Легко видеть, что N -листное накрытие с ветвлением вдоль F существует тогда и только тогда, когда реализуемый дивизи-

зором F когомологический класс делим на N в группе $H^2(X; \mathbb{Z})$, или, что равносильно, когда класс дивизора делим на N в группе $H^1(X; \mathbb{C}_\omega^*)$. Известно (см., например, [33]), что в этом случае имеется естественная биекция между множеством классов изоморфных накрытий и множеством таких элементов $E \in H^1(X; \mathbb{C}_\omega^*)$, что $N \cdot E = [F]$.

Определение 2.1. Соответствующий накрытию ρ элемент $E \in H^1(X; \mathbb{C}_\omega^*)$ называется классом накрытия.

Если дивизор F эффективен, то накрытие с классом E может быть эквивариантно вложено в линейное расслоение E . Для этого достаточно выбрать задающее дивизор F сечение f расслоения $[F]$ и рассмотреть в тотальном пространстве расслоения E множество $\{(x, \xi) \mid x \in X \setminus F, \xi^N = f(x)\}$. Эта конструкция доставляет также естественное пополнение накрытия и аналитическую структуру на компактификации накрываемого пространства. Заметим, что требование эффективности дивизора F не ограничивает общность рассуждений, так как для определения ветвления достаточно задать коэффициенты при неприводимых компонентах дивизора F лишь по модулю N . Следует, однако, иметь в виду, что класс накрытия зависит от дивизора. Если F_1 — одна из компонент дивизора F , то накрытие, имеющее относительно F класс E , имеет относительно $F + kNF_1$ класс $E + k[F_1]$.

2.2. Стандартное разрешение особенностей

Пусть, в обозначениях п.2.1, дивизор F эффективен, и $\text{red } F$ имеет нормальные пересечения. Тогда описанная в п.2.1 компактификация накрываемого пространства представима в некоторых локаль-

ных координатах в окрестности каждой точки $x \in X$ ростком вида $t^N - x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k}$, где p_1, \dots, p_k - кратности компонент дивизора F , пересекающихся в точке x . В результате разрешения таких особенностей возникают особенности нескольких более общего типа, представимые локально ростками вида

$$f = x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k} - y_1^{q_1} \dots y_e^{q_e}. \quad (2.1)$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится явное описание разрешения таких особенностей.

Будем предполагать, что компоненты множества особых точек, т.е. подмногообразия, задаваемые локально уравнениями вида $\{x_i = y_j = 0\}$, неособы, и докажем, что все особенности вида (2.1) могут быть разрешены раздутиями таких компонент. В дальнейшем такие разрешения будем называть стандартными.

Пусть $\rho: \tilde{U} \rightarrow U$ - сужение на окрестность U выбранной точки раздутия компоненты $\{x_1 = y_1 = 0\}$. Будем считать, что U - полидиск. Тогда многообразие \tilde{U} имеет стандартное покрытие двумя открытыми множествами \tilde{U}_V и \tilde{U}_W , имеющими системы координат

$$\tilde{U}_V: (V, x_2, \dots, x_k, y_1, \dots, y_e, z_1, \dots, z_m), \quad (2.2_V)$$

$$\tilde{U}_W: (x_1, \dots, x_k, W, y_2, \dots, y_e, z_1, \dots, z_m). \quad (2.2_W)$$

Если $p_1 \geq q_1$, то собственный прообраз дивизора (2.1) задается в этих координатах сечениями

$$f_V = V^{p_1} y_1^{p_1 - q_1} x_2^{p_2} \dots x_k^{p_k} - y_2^{q_2} \dots y_e^{q_e}, \quad (2.3_V)$$

$$f_W = x_1^{p_1 - q_1} x_2^{p_2} \dots x_k^{p_k} - W^{q_1} y_2^{q_2} \dots y_e^{q_e}. \quad (2.3_W)$$

Укажем алгоритм выбора раздуваемых компонент, обеспечивающий сходимость процесса. Поставим в соответствие каждой компоненте число $\rho + q$, где $x^\rho = y^q$ — уравнение исходного дивизора в окрестности общей точки этой компоненты. Будем на каждом шаге раздувать ту из компонент, для которой это число максимально (если таких компонент несколько, то выберем одну из них). Из выражений (2.3) видно, что число $\rho + q$, соответствующее собственным прообразам старых компонент, сохраняет свое значение, а число, соответствующее вновь возникающим компонентам, строго меньше, чем $\rho_1 + q_1$. Таким образом, после раздутия всех компонент с максимальным значением $\rho + q$ это максимальное значение уменьшается, что и обеспечивает сходимость.

§ 3. Поведение комплексов $\mathcal{O}'(X \setminus F)$ и $\mathcal{O}'(X, F)$ при стандартном разрешении особенностей

3.1. Формулировка основного результата

Пусть \mathcal{U} — полидиск с координатами $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_e, z_1, \dots, z_m)$, F — дивизор в \mathcal{U} , заданный сечением (2.1), и $i: F \hookrightarrow \mathcal{U}$ — включение. Предположим, что хотя бы одно из чисел ρ_i, q_j отлично от нуля. Пусть D — дивизор в \mathcal{U} , являющийся объединением координатных плоскостей $\{x_i = 0\}$ и $\{y_j = 0\}$. Рассмотрим стандартное разрешение особенностей $\rho: \bar{F} \rightarrow F$, и обозначим через \bar{D} полный прообраз дивизора D . Положим $\bar{A}^\beta = \mathcal{O}^\beta(\bar{F} \setminus \bar{D})$ и $\bar{B}^\beta = \mathcal{O}^\beta(\bar{F}, \bar{D})$.

Теорема 3.1. 1) $R^d \rho_* \bar{A}^\beta = R^d \rho_* \bar{B}^\beta = 0$ при $d > 0$.

2) Пучки $i_* \rho_* \bar{A}^\beta$ и $i_* \rho_* \bar{B}^\beta$ изоморфны подпучкам пучка

$\Omega^{\beta+1}(\mathcal{U} \setminus D) \otimes \Omega(\mathcal{U}; [F]) / \Omega^{\beta+1}(\mathcal{U} \setminus D)$, порожденным ростками сечений вида

$$x_1^{\nu_1} \dots x_k^{\nu_k} y_1^{\delta_1} \dots y_k^{\delta_k} \frac{df}{f} \wedge \omega, \quad \omega \in \Omega^{\beta}(\mathcal{U} \setminus D), \quad (3.1)$$

удовлетворяющими, соответственно, условиям

$$\nu_i q_j + \delta_j p_i \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\nu_i q_j + \delta_j p_i > 0. \quad (3.3)$$

Если $p_i = q_j = 0$, то (3.2) и (3.3) следует записать, соответственно, в виде $\nu_i \geq 0, \delta_j \geq 0$, и $\nu_i > 0, \delta_j > 0$.

Замечание 3.1. Как в формулировке, так и в дальнейших вычислениях мономы вида $x_1^{\nu_1} \dots y_1^{\delta_1} \dots$ рассматриваются по модулю f . Поэтому, если моном удовлетворяет условиям (3.2) или (3.3), то можно считать, что $\nu_i \geq 1 - p_i$ и $\delta_j \geq 0$, и, следовательно, сечение $x_1^{\nu_1} \dots y_1^{\delta_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ голоморфно. Аналогично, можно считать, что $\nu_i \geq 0$ и $\delta_j \geq 1 - q_j$, и, следовательно, сечение $x_1^{\nu_1} \dots y_1^{\delta_1} \dots \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j$ голоморфно. Поэтому запись (3.1) вместе с условиями (3.2) или (3.3) корректно определяет голоморфное сечение.

3.2. Доказательство теоремы 3.1

Теорема доказывается индукцией по числу раздутий, необходимых для разрешения особенностей дивизора F .

I. Рассмотрим неособый дивизор вида $x_1^{p_1} - 1 = 0$. Условия (3.2) и (3.3) означают в этом случае, соответственно, $\delta_j \geq 0$,

$v_i \geq 0$ при $i \geq 2$, и $s_j > 0$, $v_i > 0$ при $i \geq 2$. Сечение x_1 обратимо на F . Поэтому описанные в теореме пучки совпадают с образами мономорфизмов α и β (см. (I.6)).

2. Предположим, что $\rho_1 \geq q_1$, и $\rho_1 > 0$. Пусть $\tilde{\rho}: \tilde{U} \rightarrow U$ - раздутие подмногообразия $\{x_1 - y_1 = 0\}$, и $\tilde{i}: \tilde{F} \hookrightarrow \tilde{U}$ - включение собственного прообраза \tilde{F} дивизора F . Предположим, что разрешение ρ представляется в виде композиции $\rho' \circ \tilde{\rho}|_{\tilde{F}}$, и положим $\tilde{A}^\beta = \rho'_* \tilde{A}^\beta$ и $\tilde{B}^\beta = \rho'_* \tilde{B}^\beta$. Тогда в качестве индукционного перехода достаточно, очевидно, доказать следующие утверждения:

$$- H^1(\tilde{U}; \tilde{i}_* \tilde{A}^\beta) = H^1(\tilde{U}; \tilde{i}_* \tilde{B}^\beta) = 0;$$

- пространства глобальных сечений пучков $\tilde{i}_* \tilde{A}^\beta$ и $\tilde{i}_* \tilde{B}^\beta$ порождены над $\Gamma(\tilde{U}; \mathcal{O}_{\tilde{U}})$ полными прообразами сечений вида (3.1), удовлетворяющими, соответственно, условиям (3.2) и (3.3).

Проведем доказательство для пучка \tilde{B}^β . Для пучка \tilde{A}^β доказательство аналогично.

Выпишем подробно условия (3.3), полные прообразы сечений вида (3.1) в координатах (2.2), и условия, которым они должны удовлетворять по индукционному предположению.

$$x_1^{v_1} \dots x_k^{v_k} y_1^{s_1} \dots y_e^{s_e} \frac{df}{f} \wedge \omega \quad (3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } \rho_i s_j + q_j v_i > 0, \quad \text{при } i \geq 2, j \geq 2, \\ \text{б) } \rho_1 s_j + q_j v_1 > 0, \quad \text{при } j \geq 2, \\ \text{в) } \rho_i s_1 + q_1 v_i > 0, \quad \text{при } i \geq 2 \\ \text{г) } \rho_1 s_1 + q_1 v_1 > 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$y_1^{\delta_1} v^{t_v} x_2^{\nu_2} \dots x_k^{\nu_k} y_2^{\delta_2} \dots y_k^{\delta_k} \frac{df_v}{f_v} \Lambda \omega$$

$$\bar{\delta}_1 = \delta_1 + \nu_1, t_v = \nu_1 \quad (3.4_v)$$

$$\begin{cases} a_v) & \rho_i \delta_j + q_j \nu_i > 0, & \text{при } i \geq 2, j \geq 2 \\ \sigma_v) & (\rho_1 - q_1) \delta_j + q_j \bar{\delta}_1 > 0, & \text{при } j \geq 2 \\ \beta_v) & \rho_1 \delta_j + q_j t_v > 0, & \text{при } j \geq 2 \end{cases} \quad (3.5_v)$$

$$x_1^{\bar{\nu}_1} x_2^{\nu_2} \dots x_k^{\nu_k} w^{t_w} y_2^{\delta_2} \dots y_e^{\delta_e} \frac{df_w}{f_w} \Lambda \omega$$

$$\bar{\nu}_1 = \nu_1 + \delta_1, t_w = \delta_1 \quad (3.4_w)$$

$$\begin{cases} a_w) & \rho_i \delta_j + q_j \nu_i > 0, & \text{при } i \geq 2, j \geq 2 \\ \sigma_w) & (\rho_1 - q_1) \delta_j + q_j \bar{\nu}_1 > 0, & \text{при } j \geq 2 \\ \beta_w) & \rho_i t_w + q_1 \nu_i > 0, & \text{при } i \geq 2 \\ \gamma_w) & (\rho_1 - q_1) t_w + q_1 \bar{\nu}_1 > 0. \end{cases} \quad (3.5_w)$$

Здесь учитывается, что $\frac{df_v}{f_v} = \frac{df}{f} - q_1 \frac{dy_1}{y_1} \equiv \frac{df}{f} \pmod{f}$
и $\frac{df_w}{f_w} = \frac{df}{f} - q_1 \frac{dx_1}{x_1} \equiv \frac{df}{f} \pmod{f}$.

Лемма 3.1. Для любого удовлетворяющего условиям (3.5) набора рациональных чисел (ν_i, δ_j) полученные из него наборы $(\bar{\delta}_1, t_v, \nu_i, \delta_j)$ и $(\bar{\nu}_1, \nu_i, t_w, \delta_j)$ удовлетворяют условиям (3.5_v) и (3.5_w) соответственно.

Лемма 3.2. Существует такое натуральное N , что:

I) если $t_v \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{N} \right]$, и набор $(\bar{\delta}_1, t_v, \nu_i, \delta_j)$ удовлетворяет

условиям (3.5_v), то существует такое $t'_v \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{N} \right]$, что $t'_v \leq t_v$,

и набор (ν_i, δ_j) , полученный из набора $(\bar{\nu}_1, t'_v, \nu_i, \delta_j)$ удовлетворяет условиям (3.5);

2) если $t_w \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{N} \right]$, и набор $(\bar{\nu}_1, \nu_i, t_w, \delta_j)$ удовлетворяет условиям (3.5_w), то существует такое $t'_w \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{N} \right]$, что $t'_w \leq t_w$, и набор (ν_i, δ_j) , полученный из набора $(\bar{\nu}_1, \nu_i, t'_w, \delta_j)$, удовлетворяет условиям (3.5).

Леммы 3.1 и 3.2 доказаны в п.п. 3.3, 3.4.

Пусть ex - сечение, определяющее исключительный дивизор Ex на \tilde{U} . Рассмотрим пучок $\mathcal{O}_{\tilde{U}}$ -алгебр $\mathcal{R} = \mathcal{O}_{\tilde{U}} \left[ex^{\frac{1}{N}} \right]$.

Этот пучок Γ -ациклический, так как $\mathcal{O}_{\tilde{U}}$ -изоморфен пучку $\mathcal{O}_{\tilde{U}} \oplus \bigoplus_{k=1}^{N-1} \mathcal{O}(\tilde{U}; [Ex^k])$. Пространство $\Gamma(\tilde{U}; \mathcal{R})$ порождено над $\Gamma(\tilde{U}; \mathcal{O}_{\tilde{U}})$ полными прообразами сечений 1 и $x^{\frac{k}{N}} y^{1-\frac{k}{N}}$, $1 \leq k \leq N-1$.

Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что пучок $\tau_* \tilde{\mathcal{B}}^\beta \otimes \mathcal{R}$ порожден над \mathcal{R} конечным числом своих глобальных сечений - прообразов сечений вида (3.1), - и, следовательно, Γ -ациклический (см. лемму 3.3 в п.3.5). Следовательно, Γ -ациклический и пучок $\tau_* \tilde{\mathcal{B}}^\beta$, являющийся его прямым слагаемым.

Из леммы 3.2 следует, что пространство $\Gamma(\tilde{U}; \tilde{i}_* \tilde{\mathcal{B}}^\beta \otimes \mathcal{R}) = \Gamma(\tilde{U}; \tilde{i}_* \tilde{\mathcal{B}}^\beta) \otimes \Gamma(\tilde{U}; \mathcal{R})$ порождено над $\Gamma(\tilde{U}; \mathcal{R})$ сечениями вида (3.1) с $\nu_1, \delta_1 \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{N} \right]$, удовлетворяющими условиям (3.3). Следовательно, $\Gamma(\tilde{U}; \tilde{i}_* \tilde{\mathcal{B}}^\beta)$ порождено над $\Gamma(\tilde{U}; \mathcal{O}_{\tilde{U}})$ сечениями вида (3.1) с целочисленными параметрами. Из леммы 3.1

следует, что прообразы всех таких сечений лежат в $\Gamma(\tilde{U}; \tilde{i}_* \tilde{B}^\beta)$.

Теорема доказана.

3.3. Доказательство леммы 3.1

Необходимо доказать, что (3.5) влечет (3.5_v) и (3.5_w).

Очевидны импликации (a) \implies (a_v), (a) \implies (a_w), (б) \implies (b_v), (в) \implies (b_w), (г) \implies (г_w). Осталось доказать равносильные неравенства (б_v) и (б_w). Имеем

$$\begin{aligned} (\rho_1 - q_1) \delta_j + q_j (\delta_1 + \tau_1) &= (\rho_1 - q_1) \delta_j + \frac{q_j}{\rho_1} (\rho_1 \tau_1 + \rho_1 \delta_1) > \\ &> \frac{\rho_1 - q_1}{\rho_1} (\rho_1 \delta_j + q_j \tau_1) > \rho. \end{aligned}$$

Первое неравенство следует из (г): $\rho_1 \delta_1 > -q_1 \tau_1$; второе неравенство следует из (б). Если $\rho_1 = q_1$ и $q_j = 0$, то из (г) следует $\delta_1 + \tau_1 > 0$, и из (б) следует $\delta_j > 0$.

3.4. Доказательство леммы 3.2

Докажем сначала существование рациональных t'_v и t'_w , удовлетворяющих поставленным условиям. Легко видеть, что для этого необходимо и достаточно выполнение неравенств $\alpha_j < t'_v < \beta_i$ и $\delta_i < t'_w < \gamma_j$, где

$$\begin{aligned} \alpha_j &= - \frac{\rho_1 \delta_j}{q_j}, \quad j \geq 2, \\ \beta_i &= \bar{\delta}_1 + \frac{q_1 \tau_i}{\rho_1} \quad \text{при } i \geq 2, \quad \text{и } \beta_1 = \frac{\rho_1 \bar{\delta}_1}{\rho_1 - q_1}, \\ \gamma_j &= \bar{\tau}_1 + \frac{\rho_1 \delta_j}{q_j}, \quad j \geq 2, \\ \delta_i &= - \frac{q_1 \tau_i}{\rho_1} \quad \text{при } i \geq 2, \quad \text{и } \delta_1 = \frac{q_1 \bar{\tau}_1}{\rho_1 - q_1}. \end{aligned}$$

Если знаменатель равен нулю, то дробь полагается равной $+\infty$.

Если равны нулю и числитель, и знаменатель, то дробь полагается равной нулю. Так как $t_v > \alpha_j$ в силу (v_v) , и $t_w > \delta_i$ в силу (v_w) и (γ_w) , то достаточно доказать, что $\alpha_j < \beta_i$, и $\delta_i < \gamma_j$.

Имеем:

$$\beta_i - \alpha_j = \rho_1 \left(\frac{\bar{j}_1}{\rho_1 - q_1} + \frac{s_j}{q_j} \right) > 0,$$

$$\beta_i - \alpha_j = \frac{1}{q_j} [(\rho_1 - q_1)s_j + q_j \bar{j}_1] + q_1 \left(\frac{v_i}{\rho_i} + \frac{s_j}{q_j} \right) > 0,$$

$$\gamma_j - \delta_i = \rho_1 \left(\frac{\bar{v}_1}{\rho_1 - q_1} + \frac{s_j}{q_j} \right) > 0,$$

$$\gamma_j - \delta_i = \frac{1}{q_j} [(\rho_1 - q_1)s_j + q_j \bar{v}_1] + q_1 \left(\frac{v_i}{\rho_i} + \frac{s_j}{q_j} \right) > 0.$$

Дальнейшее доказательство проведем в случае (I), соответствующем окрестности \tilde{u}_v . Доказано, что при любом наборе значений параметров пересечение интервалов (α_j, β_i) непусто. Легко видеть, что при замене параметров $(\bar{j}_1, t_v, v_i, s_j) \mapsto (\bar{j}_1 + k(\rho_1 - q_1), t_v + k\rho_1, v_i + k\rho_i, s_j - kq_j)$ все интервалы (α_j, β_i) сдвигаются на целое число $k\rho_1$. Поэтому можно, например, считать, что $\bar{j}_1 \geq 0$, $t_v \geq 0$, $v_i \geq 0$, и $s_j \geq 1 - q_j$ (ср. замечание 3.1).

Кроме того, так как числа α_j и β_i зависят от параметров монотонно, то можно ограничиться рассмотрением лишь минимальных наборов значений, и, в частности, считать, что $s_j \leq 1$. Варьируя каждое из s_j в пределах от $1 - q_j$ до 1 и выбирая минимальные значения остальных параметров, удовлетворяющие условиям (3.5_v), мы получим конечное число наборов значений $(\bar{j}_1^{(d)}, t_v^{(d)}, v_i^{(d)}, s_j^{(d)})$.

Следовательно, найдется такое натуральное N , что в пересечении интервалов $(\alpha_j^{(d)}, \beta_i^{(d)})$, соответствующих каждому из этих наборов,

будет лежать хотя бы одна дробь из $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{N} \right]$. Это число N и есть искомое.

3.5. Пучки, порожденные глобальными сечениями

Лемма 3.3. Пусть X - аналитическое пространство, которое может быть покрыто двумя пространствами Штейна U_1 и U_2 , пересечение которых U_{12} - тоже пространство Штейна. Пусть \mathcal{A} - некоторый Γ -ациклический когеррентный пучок унитарных O_X -алгебр. Тогда любой когеррентный пучок \mathcal{A} -модулей \mathcal{F} , порожденный конечным числом своих глобальных сечений f_1, \dots, f_n , ацикличесен.

Доказательство. Эпиморфизм $\bigoplus_n \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$, переводящий $1_{\mathcal{A}}$ в $f_{\mathcal{A}}$, индуцирует эпиморфизм $\bigoplus_n \Gamma(U_{1,2}; \mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(U_{12}; \mathcal{F})$, и, следовательно, пространство $\Gamma(U_{12}; \mathcal{F})$ порождено сужениями сечений $f_{\mathcal{A}}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\Gamma(U_1; \mathcal{F}) \oplus \Gamma(U_2; \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U_{12}; \mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

Любой его I -коцикл представим в виде $\sum a_{\mathcal{A}} f_{\mathcal{A}}$, где $a_{\mathcal{A}} \in \Gamma(U_{12}; \mathcal{A})$.

Так как пучок \mathcal{A} ацикличесен, существуют такие сечения $a_i \in \Gamma(U_i; \mathcal{A})$,

что $a_{\mathcal{A}} = a_{1\mathcal{A}}|_{U_{12}} - a_{2\mathcal{A}}|_{U_{12}}$. Следовательно, коцикл $\sum a_{\mathcal{A}} f_{\mathcal{A}}$

является границей коцепи $\sum a_{1\mathcal{A}} f_{\mathcal{A}} \oplus \sum a_{2\mathcal{A}} f_{\mathcal{A}}$, что и доказывает лемму.

§ 4. Прямые образы пучков $\mathcal{O}^{\beta}(\tilde{X}_N \setminus \tilde{F})$ и $\mathcal{O}^{\beta}(\tilde{X}_N, \tilde{F})$

4.1. Дивизоры с нормальными пересечениями

Теорема 4.1. Пусть F - дивизор на неособом комплексном многообразии X , и $\text{red } F$ имеет нормальные пересечения. Пусть

$\rho : X_N \rightarrow X \setminus F$ есть N -листное циклическое накрытие с ветвлением вдоль F и классом E , и $\tilde{\rho} : \tilde{X}_N \rightarrow X$ - композиция пополнения накрытия и стандартного разрешения особенностей накрываемого пространства. Тогда:

$$1) R^d \tilde{\rho}_* \Omega^\beta(\tilde{X}_N \setminus \tilde{F}) = R^d \tilde{\rho}_* \Omega^\beta(\tilde{X}_N, F) = 0 \quad \text{при } d > 0;$$

$$2) [\tilde{\rho}_* \Omega^\beta(\tilde{X}_N \setminus \tilde{F})]_q \cong \Omega(X; [\frac{q}{N}F] - qE) \otimes \Omega^\beta(X \setminus F);$$

$$3) [\tilde{\rho}_* \Omega^\beta(\tilde{X}_N, F)]_{-q} \cong \Omega(X; qE - [\frac{q}{N}F]) \otimes \Omega^\beta(X, F).$$

Доказательство. Обозначим через $\pi : V \rightarrow X$ линейное расслоение E , через $\bar{\rho} : \bar{X}_N \rightarrow X$ пополнение накрытия, и через $i : \bar{X}_N \hookrightarrow V$ включение. Введем локальные координаты $(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_m)$ в окрестности \mathcal{U} точки $x \in X$, в которых дивизор F задается ростком $x_1^{\rho_1} \dots x_k^{\rho_k}$. Тогда в координатах $(t, x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_m)$ в окрестности $\pi^{-1}\mathcal{U}$ дивизор \bar{X}_N задается ростком $f = t^N - x_1^{\rho_1} \dots x_k^{\rho_k}$. Отсюда легко видеть, что $[\bar{\rho}_* \mathcal{O}_{\bar{X}_N}]_q = \Omega(X; -qE)$. Разложение в прямую сумму собственных подпучков соответствует разложению голоморфных функций в многочлен по степеням переменной t .

Пусть D - дивизор на V , являющийся объединением нулевого сечения $\{t=0\}$ и прообраза $\pi^{-1}F$ (объединения гиперплоскостей $\{x_i=0\}$). Тогда подпучок \mathcal{S} пучка

$$\Omega(V; [\bar{X}_N]) \otimes \Omega^{\beta+1}(V \setminus D) / \Omega^{\beta+1}(V \setminus D),$$

порожденный ростками вида $\frac{df}{f} \wedge \omega$, изоморфен пучку $\bar{\rho}^* \mathcal{O}^\beta(X \setminus F)$. Действительно, слои последнего состоят из ростков форм вида $\wedge \frac{dx_{i_\alpha}}{x_{i_\alpha}} \wedge dz_{j_\beta}$, и сужение на него гомоморфизма $\wedge \frac{df}{f}$ является мономорфизмом. Его образ совпадает с образом мономорфизма $\wedge \frac{df}{f}$, заданного на пучке

$$\mathcal{O}^\beta(V \setminus D) / \mathcal{O}^\beta(V \setminus D) \otimes \mathcal{O}(V; -[\bar{X}_N]),$$

так как $\frac{df}{f} \wedge \frac{dt}{t} = \frac{1}{N} \sum \rho_i \frac{df}{f} \wedge \frac{dx_i}{x_i}$.

Так как пучки $\mathcal{O}^\beta(X \setminus F)$ и $\mathcal{O}(X; [F])$ локально свободны, по формуле проекции получаем

$$[\bar{\rho}_* (\mathcal{I} \otimes i^* \mathcal{O}(V; \pi^*[F]))]_q = \mathcal{O}(X; [F] - qE) \otimes \mathcal{O}^\beta(X \setminus F). \quad (4.1)$$

Применим к паре дивизоров \bar{X}_N и D на многообразии $\pi^{-1}U$ теорему 3.1. Из утверждения 1 этой теоремы и из нульмерности слоев проекции $\bar{\rho}$ следует $\bar{\rho}_*$ -ацикличность пучков $\mathcal{O}^\beta(\tilde{X}_N \setminus \tilde{F})$ и $\mathcal{O}^\beta(\tilde{X}_N, \tilde{F})$. Из утверждения 2 следует, что образы этих пучков лежат в $\mathcal{I} \otimes i^* \mathcal{O}(V; \pi^*[F])$ и порождены ростками сечений вида $t^q x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k} \frac{df}{f} \wedge \omega$, удовлетворяющими, соответственно, условиям

$$r_i \geq \bar{r}_i = - \left[\frac{q}{N} \rho_i \right], \quad (4.2)$$

$$r_i \geq \bar{r}_i = \left[- \frac{q}{N} \rho_i \right] + 1 \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.1) немедленно следует утверждение 2 доказываемой

теоремы. Для доказательства утверждения 3 необходимо в (4.3) и (4.1) заменить q на $-q$ и учесть изоморфизм (1.1).

4.2. Дивизоры с изолированными особенностями

Пусть F - эффективный приведенный дивизор с изолированными особенностями на n -мерном многообразии X . Для любой голоморфной n -формы в окрестности точки $x \in F$ обозначим через $ord \omega$ ее порядок (см. [1], т. II, гл. III).

Фиксируем некоторое разрешение $\rho: X' \rightarrow X$ особенностей дивизора F , являющееся биголоморфизмом на множестве $X \setminus \text{Sing} F$.

Пусть $\rho: X_N \rightarrow X \setminus F$ - циклическое накрытие с ветвлением вдоль дивизора F и классом E . Рассмотрим накрытие $\rho^* \rho: X'_N \rightarrow X' \setminus \rho^{-1}F$, имеющее, очевидно, ветвление вдоль дивизора $\rho^{-1}F$ и класс ρ^*E . Обозначим через $\tilde{\rho}': \tilde{X}_N \rightarrow X'$ композицию пополнения накрытия $\rho^* \rho$ и стандартного разрешения особенностей компактификации покрываемого пространства, и через $\tilde{\rho}: \tilde{X}_N \rightarrow X$ композицию $\tilde{\rho}' \circ \rho$. Пусть $\tilde{F} = \tilde{\rho}^{-1}F$.

Теорема 4.2.

- 1) $R^{\alpha} \tilde{\rho}_* \mathcal{O}^n(\tilde{X}_N \setminus \tilde{F}) = R^{\alpha} \tilde{\rho}_* \mathcal{O}^n(\tilde{X}_N, \tilde{F}) = 0$ при $\alpha > 0$;
- 2) Пучок $[\tilde{\rho}_* \mathcal{O}^n(\tilde{X}_N, \tilde{F})]_{-q}$ лежит в $\mathcal{O}(X; K_X + qE)$ и состоит из ростков форм ω с $ord \omega > q/N - 1$.
- 3) При $q \neq 0$ пучок $[\tilde{\rho}_* \mathcal{O}^n(\tilde{X}_N \setminus \tilde{F})]_{-q}$ лежит в $\mathcal{O}(X; K_X + qE)$ и состоит из ростков форм ω с $ord \omega \geq q/N - 1$.
- 4) Пучок $[\tilde{\rho}_* \mathcal{O}^n(\tilde{X}_N \setminus \tilde{F})]_0$ лежит в $\mathcal{O}(X; K_X + [F])$ и со-

стоит из ростков форм $\frac{\omega}{f}$ с $\text{ord} \omega > 0$.

Доказательство. Пусть F' - собственный прообраз дивизора F при разрешении ρ , и $\rho^{-1}F = F' + \sum \rho_i E x_i$. Применяя теорему 4.1 к отображению $\tilde{\rho}'$, получаем, что рассматриваемые пучки $\tilde{\rho}'_*$ -ацикличны, и их прямые образы имеют вид

$$\begin{aligned} [\tilde{\rho}'_* \mathcal{O}^n(\tilde{X}_N, \tilde{F})]_{-q} &= \mathcal{O}(X'; K_q^{\text{rel}}), \\ [\tilde{\rho}'_* \mathcal{O}^n(\tilde{X}_N \setminus \tilde{F})]_{-q} &= \mathcal{O}(X'; K_q^{\text{стр}}), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $K_q^{\text{rel}} = K_{X'} + q\rho^*E - \sum \left[\frac{q}{N}\rho_i\right] E x_i$,

$$K_q^{\text{стр}} = K_{X'} + q\rho^*E + \sum \left[1 - \frac{q}{N}\rho_i\right] E x_i \quad \text{при } q \neq 0, \text{ и}$$

$$K_0^{\text{стр}} = K_{X'} + \rho^*[F] - \sum (\rho_i - 1) E x_i = K_{X'} + [\text{red} \rho^{-1}F].$$

Из этого и из того, что $\rho_* \mathcal{O}(X'; K_{X'}) = \mathcal{O}(X; K_X)$, следуют включения в утверждениях 2, 3, 4 теоремы. Все остальные утверждения теоремы локальны, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда X - полидиск, содержащий единственную особую точку X дивизора F , и $E = 0$. При этом можно считать, что N делится на все ρ_i . Тогда, как легко видеть,

$$\begin{aligned} K_q^{\text{стр}} &= K_{q-1}^{\text{rel}} \quad \text{при } q \neq 0, \text{ и} \\ K_0^{\text{стр}} &= \rho^*[F] + K_{N-1}^{\text{rel}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

В [34] доказано, что пучок $\mathcal{O}^n(\tilde{X}_N, \tilde{F}) = \omega_{\tilde{X}_N}$ является $\tilde{\rho}'_*$ -

ацикличным (так как общий слой проекции $\tilde{\rho}$ нульмерен). Из этого и из теоремы 4.1 вытекает ρ_* -ацикличность пучков $\mathcal{O}(X'; K_q^{rel})$ и, следовательно, пучков $\mathcal{O}(X'; K_q^{str})$. Из последнего утверждения и из теоремы 4.1 следует $\tilde{\rho}_*$ -ацикличность пучка $\mathcal{O}^n(\tilde{X}|\tilde{F})$.

Докажем утверждения о прямых образах. Обозначим для любой формы $\omega \in \mathcal{O}^n(X)$ через $g(\omega)$ ее вес относительно разрешения особенностей ρ (см. [3]). Непосредственно из определений пучков $\mathcal{O}(X'; K_q^{rel})$ и веса $g(\omega)$ следует, что $\tilde{\rho}^{-1}\omega \in \Gamma(X'; \mathcal{O}(X'; K_q^{rel}))$ тогда и только тогда, когда $g(\omega) < -q/N$. Воспользуемся результатом работы [3], где доказано, что $ord \omega \geq -g(\omega) - 1$, причем если $g(\omega) \geq -1$, то в этом неравенстве достигается равенство. Так как $-\frac{q}{N} \geq -1$, то из этого результата следует равносильность неравенств $g(\omega) < -\frac{q}{N}$ и $ord \omega > \frac{q}{N} - 1$, что и доказывает утверждение 2 теоремы. Из этого и из (4.4, 4.5) следуют остальные утверждения. При этом необходимо учесть, что при наложенных на число N ограничениях спектр особенности принадлежит группе $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$, и, следовательно, неравенство $ord \omega > \frac{q-1}{N}$ (где $q \in \mathbb{Z}$) равносильно неравенству $ord \omega \geq \frac{q}{N}$.

§ 5. Проективные гиперповерхности

Всюду в этом параграфе предполагается, что V - гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, имеющая лишь изолированные особые точки. (Отметим, что при $n=2$ из этого требования следует, что V не имеет кратных компонент).

5.1. Многочлен Александера

Пусть $\deg V = m$. Тогда все циклические накрытия с ветвлением вдоль V мажорируются m -листным накрытием $\rho: X_m \rightarrow \mathbb{C}P^n \setminus V$, имеющем класс $\mathbb{1}$ (класс гиперплоскости). Пусть $\tilde{\rho}: \tilde{X}_m \rightarrow \mathbb{C}P^n$ - композиция пополнения этого накрытия и стандартного разрешения особенностей компактификации накрываемого пространства. Как следует из результатов работы [40], $H^i(X_m) \neq 0$ лишь при $i = 0, n-1, n$. Группу $H_{n-1}(X_m; \mathbb{C})$, снабженную естественной структурой $\mathbb{C}[Z]$ -модуля, будем называть модулем Александера, а ее порядок $\Delta_V^{n-1}(t)$ - многочленом Александера гиперповерхности V . Так как автоморфизм накрытия имеет конечный порядок, то модуль $H_{n-1}(X_m; \mathbb{C})$ однозначно определяется многочленом $\Delta_V^{n-1}(t)$.

5.2. Основные понятия

Пусть f - росток функции в изолированной особой точке S . Для краткости будем называть такой росток особенностью. Пусть $\text{Spec } S$ - спектр особенности S (см. [1], т. II, гл. III).

Определение 5.1. Для любого рационального $\nu \in (0, 1)$ положим $dr(S) = \# \{ \alpha \in \text{Spec } S \mid \alpha \leq \nu - 1 \}$.

Предложение 5.1. Если при деформации особенность S распадается на несколько особенностей S_1, \dots, S_k , то $dr(S) \geq \sum dr(S_i)$.

Доказательство. Утверждение следует из определения инварианта dr и из того, что любой интервал $(d, d+1)$ при $d \in (-2, -1)$ является множеством полунепрерывности спектра (см. [4, 5]).

Определение 5.2. Пусть V, X_m, \tilde{X}_m - те же, что и в п. 5.1, и q - целое число, $1 \leq q \leq m-1$. Положим $\Omega_q(V) = [\tilde{\rho}_* \Omega^q(\tilde{X}_m)]_{-q}$,

и $\mathcal{L}_q(V) = \mathbb{P}(\Gamma(\mathbb{C}P^n; \mathcal{O}_q(V)))$.

$\mathcal{L}_q(V)$ является линейной системой, соответствующей пучку $\mathcal{O}_q(V)$. Она состоит из тех гиперповерхностей степени $q - n - 1$, которые в окрестности каждой особой точки S дивизора V задаются таким ростком f , что $\text{ord}(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) > \frac{q}{m} - 1$ (см. теорему 4.2). В ряде случаев локальные условия, налагаемые на гиперповерхности из $\mathcal{L}_q(V)$, допускают описание в терминах диаграммы Ньютона.

Предложение 5.2. Пусть особенность S дивизора V задается в некоторой локальной системе координат рядом Тейлора, имеющим \mathbb{C} -невырожденную главную часть (см. [1], т. II, гл. II). Пусть Δ - многогранник Ньютона этого ряда. Обозначим через Δ_ν многогранник, полученный из Δ сжатием в ν раз с центром в точке O и сдвигом на вектор $(-1, \dots, -1)$. Тогда локальное условие, налагаемое на гиперповерхность из $\mathcal{L}_q(V)$ заключается в том, что ее многогранник Ньютона должен лежать в $\text{Int } \Delta_{q/m}$.

Доказательство. Утверждение следует из определения системы $\mathcal{L}_q(V)$ и из способа вычисления порядка формы по многограннику Ньютона (см. [1], т. II, гл. III). При этом следует иметь в виду, что нас интересует участок спектра, лежащий в полуинтервале $(-1, 0]$.

5.3. Основные результаты

Пусть V , X_m , \tilde{X}_m - те же, что и в п. 5.1. Обозначим через $b_q^r(X_m)$ и $h_q^{r,s}(\tilde{X}_m)$ соответственно числа Бетти пространства X_m и числа Ходжа пространства \tilde{X}_m , отвечающие собственному числу λ_q автоморфизма накрытия. Имеет место очевидное соотношение

$$\Delta_V^{n-1}(t) = \prod_{q=0}^{m-1} (t - \lambda_q)^{b_q^{n-1}(X_m)}. \quad (5.1)$$

Теорема 5.1. 1) $b_q^{n-1}(X_m) \geq h_q^{n,1}(\tilde{X}_m) + h_{m-q}^{n,1}(\tilde{X}_m)$.

2) При $n = 2$ и $q \neq 0$ неравенство (1) является равенством.

$$3) h_{m-q}^{n,1}(\tilde{X}_m) = \dim \mathcal{L}_q(V) + 1 + \sum_{S \in \text{Sing } V} d_{q/m}(S) - C_{q-1}^{q-n-1}.$$

4) $\Delta_V^{n-1}(t)$ делится на $\min \Delta_V^{n-1}(t)$ - минимальный целочисленный многочлен, делящийся на

$$\prod_{q=1}^{m-1} (t - \lambda_q)^{\rho_q + \rho_{m-q}}, \quad \text{где } \rho_q = \max \left\{ 0, \sum d_{q/m}(S) - C_{q-1}^{q-n-1} \right\}.$$

Доказательство. 1) По двойственности Александра имеем

$$H_{n-1}(X_m; \mathbb{C}) = H_{n-1}(\tilde{X}_m \setminus \tilde{\rho}^{-1}V; \mathbb{C}) \cong H^{n+1}(\tilde{X}_m, \tilde{\rho}^{-1}V; \mathbb{C}).$$

Ограничиваясь двумя крайними членами градуированной группы, связанной с

ходжевой фильтрацией, получаем $b_q^{n+1} \geq \dim_{\mathbb{C}} H_q^1(\tilde{X}_m; \Omega^n(\tilde{X}_m, \tilde{\rho}^{-1}V)) + \dim_{\mathbb{C}} H_q^n(\tilde{X}_m; \Omega^1(\tilde{X}_m, \tilde{\rho}^{-1}V))$. Первое слагаемое равно

$$\dim_{\mathbb{C}} H_q^1(\tilde{X}_m; \omega_{\tilde{X}_m}) = h_q^{n,1}(\tilde{X}_m).$$

Из точной последовательности пары $(\tilde{X}_m, \tilde{\rho}^{-1}V)$ и из того, что $H^n(\tilde{\rho}^{-1}V; \Omega^1(\tilde{\rho}^{-1}V)) = 0$

(так как $\dim \tilde{\rho}^{-1}V = n-1$), следует, что второе слагаемое не

$$\text{меньше, чем } \dim_{\mathbb{C}} H_q^n(\tilde{X}_m; \Omega^1(\tilde{X}_m)) = h_q^{1,n}(\tilde{X}_m) = h_{m-q}^{n,1}(\tilde{X}_m).$$

2) Из результатов работы [37] следует, что естественный гомоморфизм $H_1(X_m; \mathbb{C}) \rightarrow H_1(\tilde{X}_m; \mathbb{C})$ является изоморфизмом на

собственных подпространствах, отвечающих отличным от 1 собственным числам. По двойственности Пуанкаре обе группы изоморфны

$$H^3(\tilde{X}_m; \mathbb{C}) = H^{2,1}(\tilde{X}_m) \oplus H^{1,2}(\tilde{X}_m).$$

3) Из того, что $\dim \text{supp } \Omega(\mathbb{C}P^n; (q-n-1)\mathbb{1}) / \Omega_q(V) = 0$,

и из Γ -ацикличности пучка $\Omega(\mathbb{C}P^n; (q-n-1)\mathbb{1})$ следует, что $H^v(\mathbb{C}P^n; \Omega_q(V)) \neq 0$ лишь при $v = 0, 1$. Утверждение 3 является теперь следствием теоремы Хирцебруха-Римана-Роха [23].

4) Это утверждение является следствием равенства (5.1), утверждений 1 и 3 и того очевидного факта, что $\dim \mathcal{L}_q(V) + 1 \geq 0$.

Замечание 5.1. Утверждение 2 справедливо и без предположения $q \neq 0$, если кривая V неприводима. В общем случае, если кривая V состоит из d неприводимых компонент, то $\beta_0^{n-1}(X_m) = d-1$.

Замечание 5.2. Утверждения 1 и 3 теоремы дают оценку многочлена Александера, зависящую от особенностей дивизора V и их расположения в $\mathbb{C}P^n$. Оценка, доставляемая утверждением 4, слабее, но она зависит лишь от набора особенностей дивизора.

Определение 5.3. Плоская проективная кривая V называется избыточной, если $\Delta_V(t) \neq \min \Delta_V(t)$.

Как показывают вычисления при $m = 6$ (см. § 6), избыточных кривых сравнительно немного.

5.4. Кривые с простыми особенностями

Отметим один частный случай, когда теорема 5.1 позволяет усилить верхнюю оценку, доставляемую теоремой 0.3.

Предложение 5.3. Пусть V , X_m , \tilde{X}_m - те же, что и в

п. 5.1. Тогда $h_{m-q}^{n,1}(\tilde{X}_m) \leq C_{q-1}^{q-n}$.

Доказательство. Пусть $H = \mathbb{C}P^{n-1}$ - гиперплоскость, трансверсально пересекающая дивизор V в неособых точках, и $\tilde{H}_m = \tilde{\rho}^{-1} H$. Тогда по теореме Лефшеца естественный гомоморфизм структур Ходжа $H^{n-1}(\tilde{X}_m) \rightarrow H^{n-1}(\tilde{H}_m)$ является мономорфизмом. Используя двойственность Серра, получаем цепочку равенств и неравенств

$$h_{m-q}^{n,1}(\tilde{X}_m) = h_q^{0,n-1}(\tilde{X}_m) \leq h_q^{0,n-1}(\tilde{H}_m) = h_{m-q}^{n-1,0}(\tilde{H}_m) \leq C_{q-1}^{q-m}.$$

Последнее неравенство можно получить, например, применяя теорему 4.1 к многообразию $H = \mathbb{C}P^{n-1}$ и неособому дивизору $F = H \cap V$ на нем.

Предложение 5.4. Пусть все особые точки S_i неприводимой кривой $V \subset \mathbb{C}P^2$ таковы, что $\text{Spec } S_i \geq -\frac{1}{2}$. (Этому условию удовлетворяют, например, все простые особенности). Тогда $\Delta_V(t)$

делит многочлен $\prod_{m/2 < q < m} [(t - \lambda_q)(t - \lambda_{m-q})]^{q-1}$.

Доказательство. При $q < m/2$ система $\mathcal{L}_q(V)$ полна, и, следовательно, избыточна. Отсутствие делителей вида $(t + 1)$ вытекает из теоремы 0.2. Оценку на сверхизбыточность систем $\mathcal{L}_q(V)$ при $q > m/2$ доставляет предложение 5.3. Утверждение вытекает теперь из теоремы 5.1 и соотношения (5.1).

Замечание 5.3. Аналогичные рассуждения применимы, очевидно, и при других ограничениях на спектр особенностей. При этом удастся оценить не весь многочлен Александра, а лишь кратности некоторых его корней.

§ 6. Кривые шестой степени

6.1. Формулировка основной теоремы

Из теоремы 0.2 следует, что впервые нетривиальные многочлены Александра появляются у неприводимых кривых шестой степени. Теорема 5.1 сводит задачу вычисления многочленов Александра кривых данной степени к отысканию избыточных кривых, так как во всех остальных случаях многочлен Александра определяется набором особенностей кривой. (Заметим, что инварианты dr всех 0-, 1- и 2-модальных особенностей легко могут быть вычислены по таблицам спектров, имеющимся в [1]).

Теорема 6.1. 1) Класс неприводимых избыточных кривых шестой степени совпадает с классом кривых, являющихся образом складки при проектировании на $\mathbb{C}P^2$ кубической поверхности в $\mathbb{C}P^3$, имеющей лишь невырожденные особые точки (т.е. точки типа A_1).

2) Набор особенностей избыточной кривой шестой степени имеет вид $a A_1 + \sum_{\rho=1}^6 b_{\rho} A_{3\rho-1} + c E_6$, где $\sum b_{\rho} \cdot \rho + 2c = 6$.

3) Многочлен Александра избыточной кривой равен $t^2 - t + 1$.

Доказательству теоремы 6.1 посвящены пп. 6.2-6.5.

6.2. Особенности избыточных кривых

Докажем, что неприводимая избыточная кривая степени 6 может иметь лишь особенности типов A_{ρ} или E_6 , расположенные определенным образом по отношению к некоторой конике.

Особенности, которые может иметь неприводимая кривая шестой степени, перечислены в табл. 6.1. Действительно, для особых точек типов Z_{17} , Z_{18} , Z_{19} , $Z_{1,\rho}$, W_{17} , W_{18} и $W_{1,\rho}$ при $\rho \geq 1$ существует прямая, локальный индекс пересечения которой с кривой в этой

точке больше 6. Это легко увидеть по нормальным формам особенностей, приведенным в [1], т. I, гл. II. Все остальные типы особенностей исключаются ограничением на род (род таких особых точек больше 10). В табл. 6.1 приведены следующие инварианты перечисленных особенностей: $d = d_{5/6}$ - количество условий, налагаемых на кривые из $\mathcal{L}_5(V)$ особой точкой данного типа; i - минимальный локальный индекс пересечения кривой из $\mathcal{L}_5(V)$ и кривой V в данной особой точке; d', d'' и i', i'' - соответственно количество условий и минимальный локальный индекс пересечения с V каждой из ветвей в предположении, что кривая из $\mathcal{L}_5(V)$ распадается в окрестности данной особой точки на две трансверсальные неособые ветви. Вычисления для всех особенностей, кроме $W_{1,p}^\#$, могут быть выполнены с помощью предложения 5.2. Особенности типа $W_{1,p}^\#$ необходимо разрешить и воспользоваться определениями. Для нерасклассифицированных особенностей типа N достаточно оценок $d(N) \geq d(N_{16}) = 6$, и $i(N) \geq i(N_{16}) = 15$. Инварианты d', d'' и i', i'' для особенностей типов $W_{1,0}$, $W_{1,p}^\#$ и N не определены, так как необходимое распадение невозможно (кривая из $\mathcal{L}_5(V)$ должна иметь в такой точке, особенность, примыкающую к A_2).

Анализ результатов вычисления показывает, что всегда $i \geq 2d$, $i' \geq 2d'$, и $i'' \geq 2d''$, причем равенства выполняются лишь для особенностей типов A_p и E_6 .

Пусть V - неприводимая кривая шестой степени. Положим $D = \sum d(S)$, $S \in \text{Sing } V$. Из теоремы 0.2 следует, что многочлен $\Delta_V(t)$ имеет вид $(1 - t + t^2)^d$. Поэтому кривая V избыточна тогда и только тогда, когда размерность системы $\mathcal{L}_5(V)$ (отвеча-

Таблица 6.1

тип	ограни- чения	d	i	d'	i'	d''	i''
A_p	$1 \leq p \leq 20$	$\left[\frac{p+1}{3} \right]$	$2d$	$d-1$	$2d'$	1	2
D_p	$4 \leq p \leq 19$	$\left[\frac{p}{3} \right]$	$2d+1$	$d-1$	$2d'+1$	1	3
E_6		2	4	1	3	1	3
E_7, E_8		2	5	1	3	1	3
E_{12}, E_{13}		4	9	2	6	1	3
E_{14}		5	11	3	8	1	3
E_{18}		6	13	4	10	1	3
E_{19}		6	13	4	11	1	3
E_{20}		6	14	4	11	1	3
$J_{2,p}$	$0 \leq p \leq 9$	$\left[\frac{p}{3} \right] + 4$	$2d+1$	$d-2$	$2d'+2$	1	3
$J_{3,p}$	$0 \leq p \leq 4$	$\left[\frac{p+1}{3} \right] + 5$	$2d+2$	$d-2$	$2d'+3$	1	3
$X_{5,p}$	$0 \leq p \leq 9$	$\left[\frac{p+1}{3} \right] + 3$	$2d+2$	$d-2$	$2d'+2$	1	4
$Y'_{7,5}$	$5 \leq r \leq 10-5$	$d'+d''+1$	$2d+2$	$\left[\frac{r+1}{3} \right] + 1$	$2d'+2$	$\left[\frac{5+1}{3} \right] + 1$	$2d''+2$
Z_{11}		3	8	1	4	1	4
Z_{12}, Z_{13}		4	10	2	6	1	4
W_{12}		3	8	1	4	1	4
W_{13}		4	10	2	6	1	4
$W_{1,0}$		5	12	-	-	-	-
$W_{5,p}^{\#}$	$1 \leq p \leq 5$	$\left[\frac{p}{3} \right] + 5$	$2d+2$	-	-	-	-
N		≥ 6	≥ 15	-	-	-	-

ющей корню $e^{2\pi i \cdot 5/6}$ многочлена $\Delta_V(t)$, больше минимально возможной. Так как $\mathcal{L}_5(V)$ является системой коник, на которые наложено D условий, то последнее требование равносильно неравенству $\dim \mathcal{L}_5(V) > \max\{-1, 5-D\}$. Считая известным поведение полных линейных систем коник, рассмотрим следующие случаи:

а) $D \leq 3$. В этом случае всегда $\dim \mathcal{L}_5(V) = 5-D$.

б) $D \leq 4$. Тогда $\dim \mathcal{L}_5(V) > 1$, если и только если существует прямая L , удовлетворяющая всем четырем условиям. Но это невозможно, так как тогда $L \circ V \geq \sum i(S) \geq 2D - 8$.

в) $D=5$, и все условия простые, т.е. от коники из $\mathcal{L}_5(V)$ требуется, чтобы она проходила через 5 фиксированных точек (некоторые из которых, возможно, бесконечно близкие). В этом случае $\dim \mathcal{L}_5(V) > 0$, если существует прямая L , проходящая через четыре из пяти точек. Но тогда, аналогично (б), имеем $L \circ V \geq 8$, что невозможно. Для получения последнего неравенства необходимо использовать оценки $i' \geq 2d'$ и $i'' \geq 2d''$.

г) $D=5$, и условия заключаются в задании предписанной базисной точки S_0 кратности 2 и двух (возможно, бесконечно близких) предписанных базисных точек S_1 и S_2 кратности 1. В этом случае $\dim \mathcal{L}_5(V) > 0$, если существует прямая L , проходящая через все три точки S_0, S_1, S_2 . Но тогда $L \circ V > 6$, что невозможно. Для получения последнего неравенства следует учесть, что особая точка S_0 кривой V не может быть типа A_p , и, следовательно, $i'(S_0) > 2d'(S_0)$ (см. табл. 5.1).

д) $D=6$. В этом случае $\dim \mathcal{L}_5(V) > -1$, если существует коника

$K \in \mathcal{L}_5(V)$. Тогда имеем $K \circ V \geq 2D = 12$, причем если не все особенности кривой V - типов A_p или E_6 , то неравенство строгое. Следовательно, система $\mathcal{L}_5(V)$ может быть непуста лишь тогда, когда все особенности кривой V - типов A_p или E_6 .

е) $D > 6$. Если существует коника $K \in \mathcal{L}_5(V)$, то $K \circ V \geq 2D > 12$. Следовательно, $\mathcal{L}_5(V) = \emptyset$.

6.3. Условия \mathcal{E}_p^i и некоторые оценки

1. Разобьем типы особенностей A_p ($2 \leq p \leq 19$) на классы $\mathcal{A}_q = \{A_{3q-1}, A_{3q}, A_{3q+1}\}$, и будем, соответственно, говорить об особых точках типа \mathcal{A}_q . К классу \mathcal{A}_2 отнесем также тип E_6 . Пусть f - росток в особой точке S типа \mathcal{A}_q . Выберем систему координат (x, y) , в которой росток f имеет нормальную форму $x^2 + y^{3p+\varepsilon}$, $\varepsilon = 0, 1, 2$. Многоугольник Ньютона этого ростка изображен на рис 6.1 а. Будем говорить, что росток h в точке S удовлетворяет условию \mathcal{E}_q^i , если его многоугольник Ньютона содержится в многоугольнике, изображенном на рис. 6.2а. Если f - особенность типа E_6 ($q = 2$, см. рис. 6.1б), то условие \mathcal{E}_2^1 следует изменить: росток h удовлетворяет условию \mathcal{E}_2^1 , если он особый (см. рис. 6.2 б).

2. Фиксируем неособый росток g с многоугольником Ньютона, изображенным на рис. 6.3, и росток h , удовлетворяющий условию \mathcal{E}_q^i . Предположим, что росток $f = h^2$ представим в виде $g \cdot \varphi_1$ или $g^2 \cdot \varphi_2$, и оценим снизу локальные индексы пересечения $i_1 = (|\varphi_1| \circ |g|)_S$ и $i_2 = (|\varphi_2| \circ |g|)_S$. Для оценок воспользуемся разрешением особенностей ростка f (см. рис. 6.5, где схематически показано полное разрешение особенности типа A_{3q-1} , явля-

ющееся частичным разрешением остальных особенностей из класса A_q ; исключительные дивизоры e_i занумерованы в порядке возникновения, в скобках указана кратность $(f)_i$ вхождения дивизора e_i в полный прообраз множества $|f|$. Схема вычислений следующая: очевидная оценка $(\varphi_1)_i \geq \min\{(f)_i, 2(h)_i\} - (g)_i$ заменяется на более сильную оценку, учитывающую реализуемость набора кратностей $(\varphi_1)_i$ некоторым ростком φ_1 (так, например, оценка $(\varphi_1)_1 \geq 0, (\varphi_1)_2 \geq 1, \dots$ может быть заменена на $(\varphi_1)_1 \geq 1, (\varphi_1)_2 \geq 1, \dots$), после чего по наборам кратностей $(\varphi_1)_i$ и $(g)_i$ вычисляется индекс пересечения i_1 . Аналогично, исходя из неравенства $(\varphi_2)_i \geq (\varphi_1)_i - (g)_i$, получается оценка на i_2 . В результате вычислений имеем

$$i_1(q, i) \geq q + i, \quad i_2(q, i) \geq \min\{q, 2i\}. \quad (6.1a)$$

При $i = 0$ последняя оценка дает $i_2(q, 0) \geq 0$, и в этом случае ее можно усилить. Действительно, если $i_2(q, 0) = 0$, то росток f представим в подходящей системе координат в виде

$f = x^2 + \varphi_2(x + y^q)^2 = x^2 + \varphi_2 y^{2q} + \dots$ и, значит, имеет особенность типа A_{2q-1} . Следовательно,

$$i_2(q, 0) \geq 1. \quad (6.1б)$$

3. Пусть теперь f - росток в особой точке S типа A_q (где $2 \leq q \leq 4$), но не E_6 . Фиксируем неособые ростки g_1 и g_2 , имеющие многоугольники Ньютона, изображенные на рис. 6.4 а и б, соответственно. Пусть h - росток, удовлетворяющий условию e_q^i . Предположим, что росток $f - h^2$ представим в одном из видов $g_1 \cdot \varphi_1, g_1 g_2 \varphi_2, g_1^2 g_2 \varphi_3$ или $g_1^2 g_2^2 \varphi_4$. Тогда, аналогично 2,

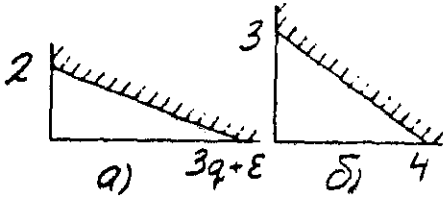


рис. 6.1.

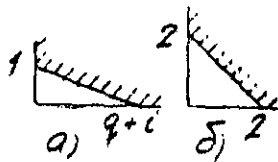


рис. 6.2.



рис. 6.3.

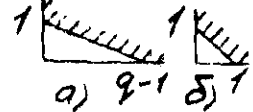
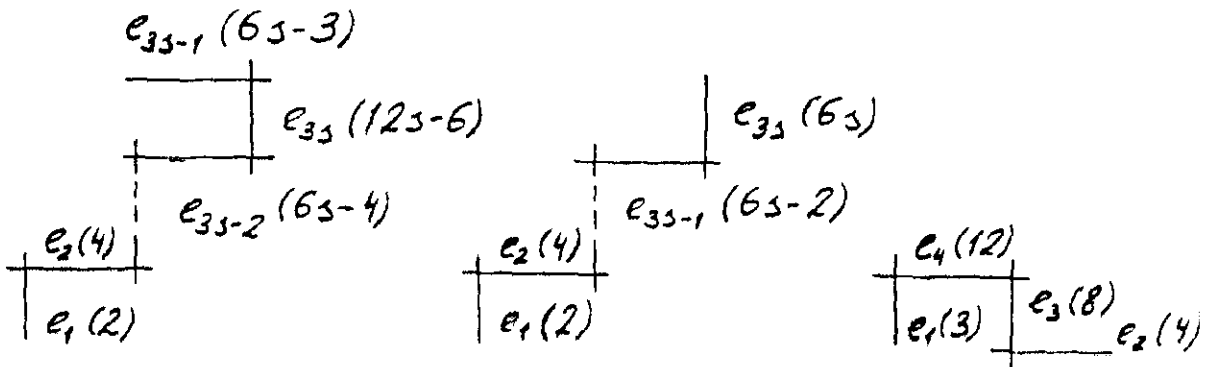


рис. 6.4.



a) $A_{2s-1}, 1 \leq s \leq 3$

б) $A_{2s}, 1 \leq s \leq 3$

в) $E_6 \in A_2$

рис. 6.5.

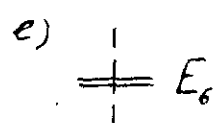
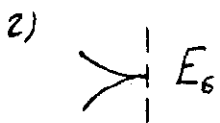
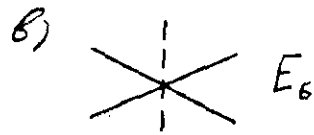
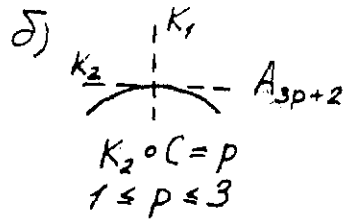
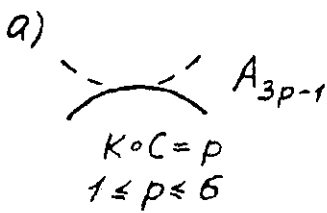


рис. 6.6.

можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} j_1 &= (|\varphi_1| \circ |g_2|)_S \geq 2; & j_2 &= (|\varphi_2| \circ |g_1|)_S \geq \rho + i - 1; \\ j_3 &= (|\varphi_3| \circ |g_2|)_S \geq 1; & j_4 &= (|\varphi_4| \circ |g_1|)_S \geq \min\{\rho - 1; 2i\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.4. Уравнения избыточных кривых

Пусть V - избыточная кривая шестой степени. В п. 6.2 доказано, что набор особенностей кривой V имеет вид $a_1 A_1 + \sum b_q A_q$, где $\sum b_q = 6$, и что существует такая коника K , что $(K \circ V)_{A_q} = 2q$ в любой особой точке типа A_q кривой V . (То, что индексы пересечения не могут превышать эти значения, следует из теоремы Безу). Докажем, что уравнение кривой V представимо в виде $f_V = f_K^3 + f_C^2 = 0$, где C - некоторая кубика. (Через f_Φ обозначается многочлен, задающий кривую Φ). В качестве C будем выбирать кубику, удовлетворяющую условиям вида $\mathcal{E}_{q_d}^{i_d}$ в каждой особой точке S_d типа A_{q_d} кривой V . Если $\sum i_d = 3$, то общее число условий равно 9, и, следовательно, такая кубика существует. Ниже показано, как следует выбирать условия в зависимости от типа коники K и набора особенностей кривой V . Запись $\sum_{q,i} b_q^i \mathcal{E}_q^i$ означает, что кривая V имеет $\sum_i b_q^i$ особых точек типа A_q , и в b_q^i из них на C наложено условие \mathcal{E}_q^i .

I. Коника K неприводима. Условия следует выбирать следующим образом:

- | | |
|--|--|
| 1) $3\mathcal{E}_1^1 + 3\mathcal{E}_1^0$ | 7) $\mathcal{E}_3^2 + \mathcal{E}_3^1$ |
| 2) $\mathcal{E}_2^1 + 2\mathcal{E}_1^1 + 2\mathcal{E}_1^0$ | 8) $\mathcal{E}_4^2 + \mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_1^0$ |
| 3) $2\mathcal{E}_2^1 + \mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_1^0$ | 9) $\mathcal{E}_4^2 + \mathcal{E}_2^1$ |

4) $3\mathcal{C}_2^1$

10) $\mathcal{C}_5^2 + \mathcal{C}_1^1$

5) $\mathcal{C}_3^1 + 2\mathcal{C}_1^1 + \mathcal{C}_1^0$

11) \mathcal{C}_6^3

6) $\mathcal{C}_3^1 + \mathcal{C}_2^1 + \mathcal{C}_1^1$

Кубика C не может содержать K в качестве компоненты, так как если $C = K + L$, то $L \circ K \geq \sum i_{K_i} = 3$, что невозможно. Поэтому $f_C|_K \neq 0$, и, так как сужения $f_C^2|_K$ и $f_V|_K$ пропорциональны (так как имеют одни и те же корни), то при подходящем выборе коэффициента при f_C имеет место распадение $f_V - f_C^2 = f_K \cdot f_{\Phi_4}$. Используя (6.1), получаем, что $\Phi_4 \circ K \geq 9$, и, следовательно, $\Phi_4 = K + \Phi_2$. Снова используя (6.1), получаем $\Phi_2 \circ K \geq 5$, и, следовательно, $\Phi_2 = K$, т.е. $f_V - f_C^2 = f_K^3$.

2. Коника K распадается на пару прямых $K_1 \neq K_2$, и точка пересечения O этих прямых не принадлежит множеству $Sing V$. В приведенных ниже выражениях особые точки кривой V , лежащие на прямой K_α , заключены в скобки $[]_\alpha$:

1) $[2\mathcal{C}_1^1 + \mathcal{C}_1^0]_1 + [\mathcal{C}_1^1 + 2\mathcal{C}_1^0]_2$

4) $[\mathcal{C}_3^2]_1 + [\mathcal{C}_1^1 + 2\mathcal{C}_1^0]_2$

2) $[\mathcal{C}_2^1 + \mathcal{C}_1^1]_1 + [\mathcal{C}_1^1 + 2\mathcal{C}_1^0]_2$

5) $[\mathcal{C}_3^2]_1 + [\mathcal{C}_2^1 + \mathcal{C}_1^0]_2$

3) $[\mathcal{C}_2^1 + \mathcal{C}_1^1]_1 + [\mathcal{C}_2^1 + \mathcal{C}_1^0]_2$

6) $[\mathcal{C}_3^2]_1 + [\mathcal{C}_3^1]_2$

Докажем, что кривые K и C не могут иметь общих компонент. Действительно, если $C = K_1 + \Phi_2$, то $\Phi_2 \circ K_2 \geq 3$, и, следовательно, $\Phi_2 = K_2 + L$. Аналогично, если $C = K_2 + \Phi_2$, то $\Phi_2 = K_1 + L$. В обоих случаях $L \circ K_1 \geq 2$, и $L \circ K_2 \geq 1$. Следовательно, L совпадает с K_1 и пересекается с K_2 в точке, отличной от O , что невозможно.

Из полученного результата, аналогично случаю I, вытекает распадение $f_V - f_C^2 = f_K \cdot f_{\Phi_4}$, а из (6.1) - цепочка неравенств и следующих из них дальнейших распадений: $\Phi_4 \circ K_1 \geq 5 \Rightarrow \Phi_4 = K_1 + \Phi_3$; $\Phi_3 \circ K_2 \geq 4 \Rightarrow \Phi_3 = K_2 + \Phi_2$; $\Phi_2 \circ K_1 \geq 3 \Rightarrow \Phi_2 = K_1 + \Phi_1$; $\Phi_1 \circ K_2 \geq 2 \Rightarrow \Phi_1 = K_2$.

3. Коника K распадается на пару прямых $K_1 \neq K_2$, точка пересечения O которых лежит в $Sing V$. Из теоремы Безу следует, что особая точка O кривой V может быть лишь типа A_2 (но не E_6), A_3 или A_4 . Условия выбираются следующим образом предполагается, что $(K_1 \circ V)_O \geq (K_2 \circ V)_O$:

- | | |
|--|--|
| 1) $\mathcal{E}_2^1 + [\mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_1^0]_1 + [\mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_1^0]_2$ | 5) $\mathcal{E}_3^1 + [\mathcal{E}_1^1]_1 + [\mathcal{E}_2^1]_2$ |
| 2) $\mathcal{E}_2^1 + [\mathcal{E}_2^1]_1 + [\mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_1^0]_2$ | 6) $\mathcal{E}_4^2 + [\emptyset]_1 + [\mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_1^0]_2$ |
| 3) $\mathcal{E}_2^1 + [\mathcal{E}_2^1]_1 + [\mathcal{E}_2^1]_2$ | 7) $\mathcal{E}_4^2 + [\emptyset]_1 + [\mathcal{E}_2^1]_2$ |
| 4) $\mathcal{E}_3^1 + [\mathcal{E}_1^1]_1 + [\mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_1^0]_2$ | |

Аналогично случаю 2, легко доказать, что кубика C не может содержать в качестве компоненты прямую K_1 . Из этого, аналогично случаю I, следует распадение $f_V - f_C^2 = f_{K_1} \cdot f_{\Phi_5}$, а из (6.1) и (6.2) - цепочка неравенств и следующих из них дальнейших распадений: $\Phi_5 \circ K_2 \geq 6 \Rightarrow \Phi_5 = K_2 + \Phi_4$; $\Phi_4 \circ K_1 \geq 5 \Rightarrow$

$$\Phi_4 = K_1 + \Phi_3; \quad \Phi_3 \circ K_2 \geq 4 \Rightarrow \Phi_3 = K_2 + \Phi_2; \quad \Phi_2 \circ K_1 \geq 3 \Rightarrow$$

$$\Phi_2 = K_1 + \Phi_1; \quad \Phi_1 \circ K_2 \geq 2 \Rightarrow \Phi_1 = K_2.$$

4. Коника K является квадратом: $K = K_1^2$. По теореме Безу все особенности кривой V должны быть типа A_2 (но не E_6), A_3 или A_4 . В этом случае $K_1 \in \mathcal{L}_4(V)$, в то время как $\sum_{S \in Sing V} d_{y_0}(S) = 3$. Следовательно, система $\mathcal{L}_4(V)$ избыточна,

и многочлен $\Delta_V(t)$ делится на (t^2+t+1) . По теореме 0.2 кривая V в этом случае приводима.

6.5. Окончание доказательства теоремы 6.1.

1. В п. 6.4 доказано, что уравнение избыточной кривой V шестой степени представимо в виде $\rho^2 + Q^3 = 0$, где ρ и Q — однородные многочлены степеней 3 и 2 соответственно. Из результатов п. 6.2 следует, что вне коники $\{Q = 0\}$ кривая V может иметь лишь особенности типа A_1 , а на этой конике — особенности типов A_p и E_6 . На рис. 6.6 показаны все возможные варианты локального взаимного расположения коники и кубики, при которой на конике возникают такие особенности. В остальных случаях возникают особенности, примыкающие к J_{10} . Эти результаты легко получить, рассматривая уравнения кривых в подходящих локальных координатах. Во всех случаях, представленных на рисунках, получаются многочлены с невырожденной главной частью. Следовательно, более глубокое вырождение особенностей (при неизменной топологии взаимного расположения кривых) невозможно. (Отметим здесь существенное отличие от ситуации, возникшей в п. 2.3 главы I, где приходилось следить за возможным дополнительным вырождением). Таким образом, утверждение 2 теоремы доказано.

2. Известно, что представимость уравнения кривой шестой степени в виде $\rho^2 + Q^3 = 0$ равносильна тому, что эта кривая является образом складки при проектировании на $\mathbb{C}P^2$ кубической поверхности $W \subset \mathbb{C}P^3$ (а именно, поверхности $\{x_0^3 + 3Qx_1 + 2\rho = 0\}$). Перебор возможных вариантов (рис. 6.6) и прямая выкладка в подходящей системе координат показывают, что в особые точки типа A_{3p-1} , лежащие на конике $\{Q = 0\}$, проектируются неособые точки поверхности W , в точки типа E_6 — невырожденные особые

точки, а в точки, примыкающие к J_{10} - вырожденные особые точки этой поверхности.

Для завершения доказательства утверждения I теоремы необходимо показать, что в особую точку S кривой V , не лежащую на конике $\{Q=0\}$, проектируется особая точка \bar{S} поверхности W , причем точки S и \bar{S} вырождены или невырождены одновременно. Введем аффинную систему координат (x, y) с началом в точке S , и представим многочлены P и Q в виде сумм однородных многочленов: $P = \sum p_i$, $Q = \sum Q_i$. Не ограничивая общности можно считать, что $P_0 = I$, $Q_0 = -I$. Ограничиваясь членами степени не выше второй, имеем

$$P^2 + Q^3 = (2P_1 + 3Q_1) + (P_1^2 + 2P_2 - 3Q_1^2 + 3Q_2) + \dots \quad (6.3)$$

Следовательно, точка S особая, если $2P_1 + 3Q_1 = 0$. Вторым член в (6.3) переписывается при этом в виде

$$-\frac{3}{4}Q_1^2 + 2P_2 + 3Q_2. \quad (6.4)$$

После введения новой переменной $\bar{x}_4 = x_4 - 1$ уравнение кубики

W записывается в виде

$$(3\bar{x}_4^2 + 3Q_1\bar{x}_4 + 2P_2 + 3Q_2) + \dots = 0 \quad (6.5)$$

Из этого выражения видно, что точка $\bar{S}(0,0,0)$ является особой (так как отсутствуют свободный и линейные члены). Для завершения доказательства осталось заметить, что (6.4) является дискриминантом квадратичной формы в (6.5), рассматриваемой как квадратный трехчлен относительно \bar{x}_4 , из чего и следует равносильность вырожденности точек S и \bar{S} .

6.6. Существование кривых

I. Теорема 6.1 допускает для избыточных кривых наборы особенностей вида $\sigma = a_1 A_1 + \sum b_p A_{3p-1} + c E_6$, удовлетворяющие условию $\sum p b_p + 2c = 6$. Из ограничения на род следует оценка

$$a_1 \leq a_{\max} = 10 - \sum b_p \left[\frac{3p-1}{2} \right] - 3c. \quad (6.6)$$

Естественно, возникает вопрос, при каких наборах коэффициентов b_p , c и a_1 , удовлетворяющих (6.6), существуют избыточные и неизбыточные кривые типа $C_6(\sigma)$. Ответ на этот вопрос известен автору лишь в некоторых частных случаях (см. 2 - 4).

2. $a_1 = 0$. В этом случае избыточные кривые существуют. Действительно, уравнение такой кривой представимо в виде $P^2 + Q^3 = 0$, и типы особых точек, лежащих на пересечении кубики $C = \{P=0\}$ и коники $K = \{Q=0\}$ зависят лишь от локального взаимного расположения этих кривых (см. рис. 6.6), т.е. от набора особенностей кривой пятой степени $K+C$. В каждом из 19 случаев легко указать кривую $K+C$ с нужным взаимным расположением компонент (см. гл. I, § 2; заметим, что кривые K и C не обязаны быть неприводимыми).

3. Набор особенностей имеет вид $a_1 A_1 + 6 A_2$. Избыточные кривые существуют при любом $a_1 \leq a_{\max} = 4$ - достаточно рассмотреть общую проекцию кубической поверхности, имеющей a_1 точек типа A_1 .

Неизбыточные кривые существуют лишь при $a_1 < a_{\max} = 4$. Существование доказано фактически в [52]. При $a_1 = 4$ достаточно заметить, что все кривые типа $C_6(4A_1 + 6A_2)$ жестко изотопны, так как они двойственны кривым четвертой степени с наборами особенностей $3A_1$, $A_1 + A_3$, A_5 или D_4 .

4. Набор особенностей имеет вид $a_1 A_1 + 3 E_6$. При $a_1 = 0$ существует как избыточная, так и неизбыточная кривые; при $a_1 = a_{max} = 1$ существует лишь избыточная кривая. Действительно, кривая V типа $C_6(a_1 A_1 + 3 E_6)$ может быть получена из кривой \bar{C} типа $C_3(a_1 A_1)$ преобразованием $T(\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3)$, где $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$ - вершины треугольника, сторонами которого являются касательные в трех точках перегиба $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3$ кривой \bar{C} . Доказываемое утверждение следует из того, что у кривой типа $C_3(\emptyset)$ можно выбрать тройку точек перегиба, как лежащих, так и не лежащих на одной прямой, в то время как три точки перегиба кривой типа $C_3(A_1)$ всегда лежат на одной прямой.

Одновременно доказано, что теоремы I.1 и I.2 главы I не допускают дальнейшего обобщения (см. гл. I, замечание I.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гуссейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. т. I - М.: Наука, 1982; т. II - М.: Наука, 1984
2. Варченко А.Н. Асимптотики голоморфных форм определяют смешанную структуру Ходжа. - ДАН СССР, 1980, т. 255, № 5, с. 1035 - 1038
3. Варченко А.Н. Асимптотическая структура Ходжа в исчезающих когомологиях. - Изв. АН СССР, сер. матем., 1981, т. 45, с. 540-591
4. Варченко А.Н. Об изменении дискретных характеристик критических точек функций при деформациях. - УМН, 1983, т. 38, вып. 5, с. 126 - 127
5. Варченко А.Н. Асимптотики интегралов и структура Ходжа. - Итоги науки, Современные проблемы математики, 1983, т. 22, с. 130 - 166
6. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. - М.: Мир, 1969
7. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. - М.: ИЛ, 1961
8. Голубина Л.В., Тай К.К. Классификация особых точек плоских действительных кривых пятого порядка. - Дифференциальные и интегральные уравнения, вып. 2, Горький, 1978, с. 130 - 136
9. Гудков Д.А., Уткин Г.А., Тай М.А. Полная классификация нераспадающихся кривых 4-го порядка. - Матем. сб., т. 69 (III), вып. 2, 1966, с. 222 - 256
10. Гудков Д.А., Голубина Л.В. О классификации наборов особых точек уникурсальных плоских кривых пятого порядка. - Диффе-

- ренциальные и интегральные уравнения, вып. 4, Горький, 1981
11. Гудков Д.А., Голубина Л.В., Кубрина Л.Г., Зародова А.В.
Классификация трехточечных наборов особых точек уникарсальных кривых пятого порядка
12. Гудков Д.А. О кривой 5-го порядка с 5-ю точками возврата. - Функциональный анализ, 1982, т. 16, вып. 3.
13. Дегтярев А.И. Топологические изотопии алгебраических кривых. - ДАН СССР, 1986, т. 286, № 6, с. 1295 - 1298.
14. Дегтярев А.И. Многочлен Александра проективной гиперповерхности. - Препринт ЛОМИ Р-II-86, Ленинград, 1986.
15. Дегтярев А.И. Изотопическая классификация алгебраических кривых степени пять. - Препринт ЛОМИ Р-3-87, Ленинград, 1987
16. Коксетер Г.С.М., Мозер У.О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. - М.: Наука, 1980
17. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. - М.: Мир, 1980
18. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. - М.: Мир, 1971.
19. Уокер Р. Алгебраические кривые. - М.: ИЛ, 1952
20. Уэлс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. - М.: Мир, 1976
21. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. - М.: Мир, 1981
22. Хиронака Х. Разрешение особенностей алгебраических многообразий над полем характеристики нуль. - Математика, 1965, т. 9, вып. 6, с. 2-70; 1966, т. 10, вып. 1, с. 3-89; 1966, т. 10, вып. 2, с. 3-58
23. Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. - М.: Мир, 1973

24. Abelson, Harold. Fundamental groups of plane curves and their duals. - *Indiana Univ.Math.J.*, 1976, v.25, No.1, p.65-67.
25. Comessatti A. Sui piani tripli ciclici irregolari. - *Rend. Circ.Mat.Palermo*, 1911, v.31.
26. Deligne P. Le group fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien. *Sém.Bourbaki*, Nov.1979.
27. Deligne P. Theorie de Hodge. II. - *Publ.Math.IHES*, 1971, v.40, p.5-58; III. - *Publ.Math.IHES*, 1974, v.44, p.5-57.
28. Dolgachev I., Libgober A. On the fundamental group of the complement to a discriminant variety. - *Lecture Notes in Math.*, v.862, p.1-25.
29. de Franchis M. I piani doppi dotati di due o pice differenziali totali di prima specie. - *Atti Acad.Naz.Lincei, Rend, V.s.*, 1904, v.13.
30. Fulton W. On the fundamental group of the complement of a plane curve. - Preprint.
31. Fulton W. On nodal curves. - *Lecture Notes in Math.*, v.997, p.146-155.
32. Fulton W., Lazarsfeld R. Connectivity and its application in algebraic geometry. - *Lecture Notes in Math.*, v.862, p.26-92.
33. Hirzebruch F. The signature of ramified coverings. - *Global Analysis, Papers in honor of K.Kodaira*, 1969, p.253-265.
34. Kollar Janos. Higher direct images of dualizing sheavs. I. - *Ann.Math.*, 1986, v.123, N 1, p.11-42.
35. van Kampen E.R. On the fundamental group of an algebraic curve. - *Amer.J.Math.*, 1933, v.55, p.255-260.
36. Toshitake Kohno. Differential forms and the fundamental

- group of the complement of hypersurfaces. - Proc. of Simposia in Pure Math., 1983, v.40, part 1.
37. Libgober A. Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiply planes. - Duke Math.J., 1982, v.49, N 4, p.833-851.
 38. Libgober A. Alexander modules of plane algebraic curves. - Contemporary Math., 1983, v.20, p.231-447.
 39. Libgober A. Alexander invariants of plane algebraic curves. - Proc.Symp. in Pure Math., 1983, v.40, part 2, p.135-143.
 40. Libgober A. Homotopy groups of the complement to singular hypersurfaces. - Bul.Amer.Math.Soc., 1985, v.13, N 1, p.49-51.
 41. Moishezon B.G. Stable branch curves and braid monodromics. - Lecture Notes in Math., 1981, v.862, p.107-192.
 42. Nori M.V. Zariski conjecture and related problems. - Ann. scient.Éc.Norm.Sup., 4 série, 1983, t.16, p.305-344.
 43. Oka M. On the fundamental group of the complement of a reducible curve in . - J.Lon.Math.Soc., 1976, v.12, p.239-252.
 44. Oka M. Some plane curves whose complement have nonabelian fundamental groups. - Math.Ann., 1978, v.218, p.55-65.
 5. Prill D. The fundamental group of the complement of an algebraic curve. - Manuscripta math., 1974, v.14, p.163-172.
 6. Randell R. The fundamental group of the complement of a singular plane curve. - Quart.J.Math.Oxford, 1980, v.31, p.71-79.
 7. Steenbrink J.H.M. Mixed Hodge structure on vanishing cohomology. - Real and Complex Singularities, Nordic Summer School, Oslo, 1976.
 8. Zariski O. On the problem of existence of algebraic func-

tion of two variables possessing a given branch curve. -

Amer.J.Math., 1929, v.51, p.305-328.

49. Zariski O. On the linear connection index of algebraic surfaces
faces . - Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 1929, v.15,
p.494-501.

50. Zariski O. On the irregularity of cyclic multiply planes.
- Ann.Math., 1931, v.32, p.485-511.

51. Zariski O. A theorem on the Poincaré group of an algebraic
hypersurface. - Ann.Math., 1937, v.38, p.131-141.

52. Zariski O. Algebraic Surfaces. - Springer-Verlag, 1971.