Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Nisan 2005

Soru: $-1 < x < 1$ şartını sağlayan bütün x sayılarının

$$ax^2 + bx + c \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

eşitsizliğini de sağladığını kabul edersek, $\frac{a}{2} + c$'nin maksimum değeri ne olur?

Çözüm: Eşitsizlikte $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ koyalim:

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} + c \le \sqrt{2}$$
$$\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}} + c \le \sqrt{2}$$

Bu eşitsizlikleri toplarsak

$$\frac{a}{2} + c \le \sqrt{2}$$

elde ederiz. Şimdi de $\frac{a}{2} + c$'nin $\sqrt{2}$ değerini alabileceğini gösterelim. Aslında, $a = \sqrt{2}$, $b = 0$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ değerleri için eşitsizliğimiz

$$\sqrt{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

formuna dönüşür. Bu son eşitsizliği de aritmetik-geometrik eşitsizliğinin sonucu olarak elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{(x^2+\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2})(2-2x^2)} \\ &\le \sqrt{\left(\frac{x^2+\frac{1}{2}+x^2+\frac{1}{2}+2-2x^2}{3}\right)^3} = 1.\end{aligned}$$

Böylece, $\frac{a}{2} + c$'nin maksimum değeri $\sqrt{2}$ olur.