Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Nisan 2024

Soru:

Bir $n \geq 3$ tam sayısı ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayıları için $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ sayıları, her $1 \leq k \leq n$ için

$$b_k = \frac{a_k + \max\{a_{k+1}, a_{k+2}\}}{2}$$

ve $b_{n+1} = b_1$ olarak tanımlanıyor ($a_{n+1} = a_1$ ve $a_{n+2} = a_2$). Tüm $n \geq 3$ tam ve $a_1, a_2 \ldots, a_n$ gerçel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i+1})^2$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm:

$2b_i = c_i$ ve $a_i - a_{i+1} = x_i$ olsun. Tüm x, y gerçel sayılar olmak üzere

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + |\frac{x-y}{2}|$$

olduğuna göre,

$$c_i - c_{i+1} = x_i + \frac{x_{i+1}}{2} + \frac{x_{i+2}}{2} + |\frac{x_{i+1}}{2}| - |\frac{x_{i+2}}{2}| \qquad (1)$$

olur. Her i indisi için

$$y_i = \frac{x_i}{2} + |\frac{x_i}{2}| \quad \text{ve} \quad z_i = \frac{x_i}{2} - |\frac{x_i}{2}|$$

olsun. Buna göre, $x_i \geq 0$ iken $y_i = x_i$, $z_i = 0$ ve $x_i < 0$ iken $y_i = 0$, $z_i = x_i$ olur. Yeni değişkenler kullanılarak (1) den

$$(c_i - c_{i+1})^2 = (x_i + y_{i+1} + z_{i+2})^2 \le 2x_i^2 + 2(y_{i+1} + z_{i+2})^2 = 2x_i^2 + 2y_{i+1}^2 + 2z_{i+2}^2 + 4y_{i+1}z_{i+2}$$

elde ediliyor ($(t+s)^2 \le 2t^2 + 2s^2$ eşitsizliği kullanıldı). $y_i \ge 0$ ve $z_i \le 0$ olduğu için her zaman $y_{i+1}z_{i+2} \le 0$. Demek ki

$$(c_i - c_{i+1})^2 \le 2x_i^2 + 2y_{i+1}^2 + z_{i+2}^2 \qquad (2)$$

olur. Son olarak soruda kanıtlanması gereken

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}(c_i - c_{i+1})^2$$

eşitsizliğinde (2) eşitsizliğini yazıp her i için $y_i^2 + z_i^2 = x_i^2$ olduğunu kullanırsak çözüm tamamlanmış olur.