Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2023

Soru:

Her $1 \leq i \leq 2023$ için $x_i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ olacak şekilde oluşturulan tüm $(x_1, x_2, \ldots, x_{2023})$ 2023-lülerinden oluşan kümeyi $\mathcal{S}$ ile gösterelim. Bir $T \subset \mathcal{S}$ alt kümesisin herhangi bir $(x_1, x_2, \ldots, x_{2023}) \in T$ elemanı için $y_i \leq x_i$ $(1 \leq i \leq 2023)$ koşulunu sağlayan tüm $(y_1, y_2, \ldots, y_{2023})$ 2023 leri de T nin elemanı ise, T alt kümesine aşağıya doğru yoğun diyelim. Bir $T \subset \mathcal{S}$ alt kümesisin herhangi bir $(x_1, x_2, \ldots, x_{2023}) \in T$ elemanı için $y_i \geq x_i$ $(1 \leq i \leq 2023)$ koşulunu sağlayan tüm $(y_1, y_2, \ldots, y_{2023})$ 2023 leri de T nin elemanı ise, T alt kümesine yukarıya doğru yoğun diyelim.

A ve B sırasıyla $\mathcal{S}$ kümesinin aşağıya doğru yoğun ve yukarıya doğru yoğun boş olmayan alt kümeleri olmak üzere,

$$f(A, B) = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 100^{2023}.

Soruyu $\mathcal{S}$ kümesinin n bir pozitif tam sayı olmak üzere, tüm n-liler olduğu durumda çözelim. $A = B = \mathcal{S}$ ise $f(A, B) = 100^n$ olur. n üzerinden tümevarımla $f(A, B) \geq 100^n$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 1$. $A = \{1, 2, \ldots, a+c\}$ ve $B = \{100-b-c+1, \ldots, 100\}$ olsun. O zaman $|A \cap B| = c$, $|A| = a + c$, $|B| = b + c$ ve

$$f(A, B) = \frac{(a+c)(b+c)}{c} = \frac{(a+b+c)c + ab}{c} = 100 + \frac{ab}{c} \geq 100.$$

olur.

Eşitsizlik $n-1$ için doğru olsun. A kümesinin son basamağı i olan elemanlarının son basamaklarının silinmesiyle elde edilen küme A_i olsun: $A = \cup_{i=1}^{100} A_i$. Buna göre, $|A| = \sum_{i=1}^{100} |A_i|$ ve $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{100}$ olur. B kümesinin son basamağı i olan elemanlarının son basamaklarının silinmesiyle elde edilen küme B_i olsun: $B = \cup_{i=1}^{100} B_i$. Buna göre, $|B| = \sum_{i=1}^{100} |B_i|$ ve $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_{100}$ olur. O zaman

$$|A \cap B| = \sum_{i=1}^{100} |A_i \cap B_i| \leq \frac{1}{100^{n-1}} \cdot \sum_{i=1}^{100} |A_i| \cdot |B_i|$$

$$\leq \frac{1}{100^{n-1}} \cdot \frac{1}{100} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{100} |A_i|\Big)\Big(\sum_{i=1}^{100} |B_i|\Big) = \frac{1}{100^n} \cdot |A| \cdot |B|$$

olur (ilk eşitsizlik tümevarım varsayımından, ikinci eşitsizlik ise Chebyshev'in yeniden düzenleme eşitsizliğinden elde ediliyor). İspat tamamlandı.