Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ocak 2023

Soru:

Negatif olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ gerçel sayıları $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2023} = 1$ eşitliğini sağlıyor. En çok kaç (i, j) sıralı ikilisi için

$$\frac{a_i^2}{4} + a_j \geq \frac{1}{2022}$$

eşitsizliği sağlanabilir?

Çözüm: Cevap: $2023^2 - 2023$.

Soruda 2023 yerine n yazalım ve soruyu tüm $n \geq 2$ sayıları için çözelim. $n^2 - n$ için örnek, sayıların $n-1$ tanesi $\dfrac{1}{n-1}$ ve diğeri 0 iken elde ediliyor.

Şimdi sorudaki eşitsizliği sağlamayan ikili sayısının en az n olduğunu ve dolayısıyla sorudaki eşitsizliği sağlayan ikili sayısının $n^2 - n$ sayısından daha fazla olamayacağını gösterelim. Genelliği bozmadan $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ varsayabiliriz.

$$(i, j) = (1, n), (2, n-1), \ldots, (n, 1)$$

ikilileri için sorudaki eşitsizliği inceleyeceğiz, çünkü bunların herhangi biri için $\dfrac{a_i^2}{4} + a_j < \dfrac{1}{n-1}$ ise, indisleri bir arttırarak en az n tane sorudaki eşitsizliği sağlamayan ikili elde ederiz ve ispat tamamlanır. n eştsizliğin hepsi doğru olsun:

$$\frac{a_1^2}{4} + a_n \geq \frac{1}{n-1}, \ \frac{a_2^2}{4} + a_{n-1} \geq \frac{1}{n-1}, \ \ldots, \ \frac{a_n^2}{4} + a_1 \geq \frac{1}{n-1}.$$

$a_1 + a_n, a_2 + a_{n-1}, \ldots, a_n + a_1$ sayılarının toplamı 2'ye eşittir. Buna göre, bu sayılardan öyle bir tanesi vardır ki değeri en fazla $\frac{2}{n}$ dir. Bu terim $a_k + a_{n+1-k}$ olsun. $a_k = p$ ve $a_{n+1-k} = q$ diyelim. O zaman $p + q \leq \frac{2}{n}$ ve

$$\frac{p^2}{4} + q \geq \frac{1}{n-1}, \quad \frac{q^2}{4} + p \geq \frac{1}{n-1}$$

olacaktır. Son iki eşitsizliği çarparsak

$$(\frac{p^2}{4} + q)(\frac{q^2}{4} + p) = \frac{p^3 + q^3}{4} + \frac{p^2q^2}{16} + pq \geq \frac{1}{(n-1)^2} \qquad (1)$$

gelir. $p + q \leq \frac{2}{n}$ olduğundan $pq \leq \frac{p+q)^2}{4} \leq \frac{1}{n^2}$ ve $p^3 + q^3 \leq (p+q)^3 \leq \frac{8}{n^3}$ gelir. Bu eşitsizlikleri (1) de kullanırsak

$$\frac{2}{n^3} + \frac{1}{16n^4} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{(n-1)^2}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\frac{2}{n^3} + \frac{1}{16n^4} + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^4} < \frac{1}{(n-1)^2}$$

olduğundan (1) ile çelişki geliyor. Demek ki sorudaki eşitsizliği sağlamayan (i, j) ikilisi sayısı en az n dir.