Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2022

Soru:

n verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{ab}{a+b} - n$$

ifadesinin alabileceği en küçük *pozitif* değer $f(n)$ olsun. $f(n)$ yi n'nin bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

Çözüm: Cevap: $\dfrac{1}{(n+1)^2+1}$.

$\dfrac{ab}{a+b} - n > 0$ koşulunu m bir pozitif tam sayı olmak üzere, $ab = (a+b)n + m$ olarak yazalım. O zaman

$$(a-n)(b-n) = n^2 + m$$

olur ve $a > n$, $b > n$ elde edilir. $a - n = s$ ve $b - n = t$ olsun. O zaman

$$st = n^2 + m \tag{1}$$

$$s + t \leq 1 + st = 1 + n^2 + m \tag{2}$$

olur ve (1) i kullanırsak

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{n^2 + st + n(s+t)}{2n+s+t} = \frac{n^2 + n^2 + m + n(s+t)}{2n+s+t} = n + \frac{m}{2n+s+t} \tag{3}$$

ve (3) de (2) ni kullanırsak

$$\frac{ab}{a+b} = n + \frac{m}{2n + n^2 + 1 + m}. \tag{4}$$

olur. Son olarak, tüm pozitif L tam sayıları için $\dfrac{m}{L+m} \geq \dfrac{1}{L+1}$ olduğundan (4) den

$$\frac{ab}{a+b} - n \geq \frac{1}{(n+1)^2+1}.$$

elde edilir. $a = n+1$ ve $b = n^2+n+1$ durumunda

$$\frac{ab}{a+b} - n = \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

olur.