



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Temmuz-Ağustos 2022

Soru:

x, y ve z pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{5}{z},$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: $3 \cdot \sqrt[3]{36}$.

AO-GO eşitsizliğinden

$$xy + \frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{6}},$$

$$yz + \frac{3}{2y} + \frac{3}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{2}},$$

$$zx + \frac{2}{z} + \frac{2}{3x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

eşitsizlikleri gelir. Bu üç eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{5}{z} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{36}.$$

elde edilir.

Eşitlik durumu $(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3}, \frac{\sqrt[3]{6}}{2}, \sqrt[3]{6} \right)$ iken elde edilir.