Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Haziran 2022

Soru:

Tüm rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, tüm pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^+$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için

$$f(x) + f(y) = \left(f(x+y) + \frac{1}{x+y}\right)(1 - xy + f(xy)) \qquad (*)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$.

Önce üç lemma ispatlayacağız.

Lemma 1. $f(1) = 0$.

İspat: $(*)$ eşitliğinde $x = y = 1$ yazarsak $2f(1) = \left(f(2) + \dfrac{1}{2}\right) f(1)$ elde ederiz. $f(1) \neq 0$ olsun. O zaman $f(2) = \dfrac{3}{2}$. $(*)$ eşitliğinde $x = y = 2$ yazarsak $3 = 2f(2) = \left(f(4) + \dfrac{1}{4}\right)(f(4) - 3)$ elde ederiz. Demek ki ya $f(4) = \dfrac{15}{4}$ ya da $f(4) = -1$ olacaktır. $(*)$ eşitliğinde $y = 1$ yazarsak $f(x) + f(1) = \left(f(x+1) + \dfrac{1}{x+1}\right)(1 - x + f(x))$ elde ederiz. Son eşitlikte $x = 2, 3, 4, 5$ yazarsak

$$\frac{3}{2} + f(1) = \left(f(3) + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$f(3) + f(1) = \left(f(4) + \frac{1}{4}\right)(f(3) - 2 \qquad (2)$$

$$f(4) + f(1) = \left(f(5) + \frac{1}{5}\right)(f(4) - 3) \qquad (3)$$

$$f(5) + f(1) = \left(f(6) + \frac{1}{6}\right)(f(5) - 4) \qquad (4)$$

elde ederiz. $f(4) = -1$ olursa, (1) ve (2) eşitliklerinden $f(1) = -\dfrac{19}{27}$ ve $f(3) = \dfrac{34}{27}$, (3) ve (4) eşitliklerinden ise $f(5) = \dfrac{61}{270}$, $f(6) = -\dfrac{245}{6114}$ gelir. Son olarak $(*)$ eşitliğinde $x = 2, y = 3$ yazarsak

$$f(2) + f(3) = \left(f(5) + \frac{1}{5}\right)(f(6) - 5)$$

elde ederiz. Bu eşitlik yukarıda bulunan $f(2), f(3), f(5), f(6)$ değerleri için sağlanmıyor. Buna göre tek seçenek $f(4) = \dfrac{15}{4}$ dir. Bu durumda

$$f(3) + f(1) = 4(f(3) - 2), \quad \frac{3}{2} + f(1) = \left(f(3) + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

olur. Son iki denklem sistemini çözersek $f(1) = 0$ elde edilir.

Lemma 2. $f(2) = \dfrac{3}{2}$.

İspat: Tüm $x \in \mathbb{Q}^+$ için $f(1) = 0$ olduğuna göre

$$f(x) = \left(f(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)(1 - x + f(x)) \qquad (5)$$

olur. (5) de $x = 2$ ve 3 yazarsak

$$f(2) = \left(f(3) + \frac{1}{3}\right)(f(2) - 1), \quad f(3) = \left(f(4) + \frac{1}{4}\right)(f(3) - 2)$$

elde edilir. $(*)$ eşitliğinde $x = 2, y = 2$ yazarsak
$2f(2) = \left(f(4) + \dfrac{1}{4}\right)(f(4) - 3)$ elde edilir. Son üç denklemden $t = f(4)$ cinsinden üç uncü dereceden denklem elde eiliyor:

$$16t^3 - 32t^2 - 101t - 15 = 0.$$

f fonksiyonu rasyonel değerler aldığına göre, $t = f(4)$ bir rasyonel sayı olma zorundadır. Bu denklemin tek rasyonel kökü $t = \dfrac{15}{4}$ dir. O zaman $f(3) = \dfrac{8}{3}$ ve $f(2) = \dfrac{3}{2}$ olur.

Lemma 3. Tüm pozitif n tam sayıları için $f(n) = n - \dfrac{1}{n}$.

İspat: $n = 1$ için $f(1) = 0$. $n \geq 2$ için gereken eşitlik (5) i kullanarak n üzerinden tümevarımla geliyor.

Son olarak $x = \dfrac{m}{n}$ için

$$f(m/n) = \frac{m}{n} - \frac{n}{m} \tag{6}$$

olduğunu göstereceğiz. İspat m üzerinde tümevarımla yapılacaktır. $m = 1$ durumunda $(*)$ eşitliğinde $y = \dfrac{1}{x}$ yazarsak tüm $x \in \mathbb{Q}^+$ sayıları için

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

elde ederiz. Buradan Lemma 3 ü kullanarak tüm pozitif n tam sayıları için

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - n$$

eşitliğini elde ederiz. (6) formülü m için doğru olsun. $(*)$ eşitliğinde $x = \dfrac{m}{n}$, $y = \dfrac{1}{n}$ yazarsak

$$f(m/n) + f(1/n) = \left(f((m+1)/n) + \frac{n}{m+1}\right)\left(1 - \frac{m}{n^2} + f(m/n^2)\right) \tag{7}$$

elde ederiz. (7) de $f(m/n) = \dfrac{m}{n} - \dfrac{n}{m}$ ve $f(m/n^2) = \dfrac{m}{n^2} - \dfrac{n^2}{m}$ yazıp sadeleştirirsek

$m + 1$ için gereken ifade elde edilir:

$$f\left(\frac{m+1}{n}\right) = \frac{m+1}{n} - \frac{n}{m+1}.$$

Çözüm tamamlanmıştır.