Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mayıs 2022

Soru:

$$xyz = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{y}{z}(y - x^2) + \frac{z}{x}(z - y^2) + \frac{x}{y}(x - z^2) = 0$$

eşitliklerini sağlayan x, y, z pozitif gerçel sayılarının en büyüğü ile en küçüğünün toplamının ortancaya oranı en az kaç olabilir?

Çözüm: Cevap: $\dfrac{5}{\sqrt[5]{256}}$.

$\dfrac{x^2}{y} = a$, $\dfrac{y^2}{z} = b$ ve $\dfrac{z^2}{x} = c$ olsun. Yeni değişkenlerde koşullar

$$abc = 1, \quad a + b + c = ab + bc + ca$$

şeklinde olacaktır. Buradan $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$ elde edilir. Buna göre, a, b, c sayılarının en az biri 1 sayısına eşittir. Genelliği bozmadan $a = 1$ olsun. O zaman $y = x^2$ ve $z = \dfrac{1}{x^3}$ olur. $0 < x \le 1$ ise $x^2 \le x \le \dfrac{1}{x^3}$ ve $x > 1$ ise $\dfrac{1}{x^3} < x < x^2$ olur. Buna göre, her iki durumda x ortanca sayı oluyor. AO-GO eşitsizliğinden

$$\frac{x^2 + \dfrac{1}{x^3}}{x} = x + \frac{1}{x^4} = \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x^4} \ge 5\sqrt[5]{\frac{1}{4^4}}.$$

elde edilir. Eşitlik durumunda $\dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{x^4}$ ve $x = \sqrt[5]{4}$ olur. Bu durumda $y = x^2 = \sqrt[5]{16}$ ve $z = \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{64}}$ olur. Sonuç olarak x, y, z pozitif gerçel sayılarının en büyüğü ile en küçüğünün toplamının ortancaya oranı $x = \sqrt[5]{4}$, $y = \sqrt[5]{16}$, and $z = \dfrac{1}{\sqrt[5]{64}}$ durumunda alabileceği en küçük değer olan $\dfrac{5}{\sqrt[5]{256}}$ olur.