Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Nisan 2022

Soru:

Q tam katsayılı bir polinom ve p bir asal olmak üzere $p \mid Q(n)$ olmasını sağlayan bir n tam sayısı yoksa Q polinomu p asalını dışlıyor diyelim. Tam olarak bir asalı dışlayan ve rasyonel kökü bulunmayan tam katsayılı bir polinom var mıdır?

Çözüm: Cevap: $Q(x) = (2x^3 + 1)(x^2 - x + 1)$ polinomu koşulları sağlıyor.

$Q(x)$ polinomunun rasyonel kökü yoktur. $Q(x)$ polinomunun sadece $p = 2$ asal sayısını dışladığını gösterelim.

Gözlem 1: $p \equiv 1 \pmod 3$ koşulunu sağlayan her tek p asal sayısı için $n^2 - n + 1 \equiv 0 \pmod p$ olacak şekilde bir n tam sayısı bulunur.

İspat. ω sayısı p modunda bir ilkel kök olmak üzere, $n = -\omega^{(p-1)/3}$ olsun. O zaman $n^3 \equiv -1 \pmod p$ ve $n \not\equiv -1 \pmod p$ olur. Son olarak $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$ eşitliğinden $n^2 - n + 1 \equiv 0 \pmod p$ elde edilir.

Gözlem 2: $p \equiv 2 \pmod 3$ koşulunu sağlayan her tek p asal sayısı için $2n^3+1 \equiv 0 \pmod p$ olacak şekilde bir n tam sayısı bulunur.

İspat. $2a+1 \equiv 0 \pmod p$ koşulunu sağlayan bir a tam sayısı alalım. $3 \mid p-2$ olduğundan $3 \mid 2p-1$ gelir. O zaman $n = a^{(2p-1)/3}$ tam sayısı için Fermat teoreminden $n^3 \equiv a^{2p-1} \equiv a \pmod p$ olur. Son olarak, $2n^3 + 1 \equiv 2a + 1 \equiv 0 \pmod p$ elde edilir.

$3 \mid Q(2)$ olduğundan $Q(x)$ polinomu $p = 3$ asal sayısını dışlamıyor. Gözlem 1' e göre, $Q(x)$ polinomu $p \equiv 1 \pmod 3$ asal sayılarını dışlamıyor. Gözlem 2' ye göre, $Q(x)$ polinomu $p \equiv 2 \pmod 3$ asal sayılarını dışlamıyor. Her n tam sayısı için $2n^3 + 1$ ve $n^2 - n + 1$ tek sayı olduğundan $Q(x)$ polinomu $p = 2$ asal sayısını dışlıyor. Çözüm tamamlanmıştır.