Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Şubat 2022

Soru:

Eğitim yılı boyunca öğretmen sınıfta 2022 soru sordu. Her soru sorulduğunda o soruyu çözemeyen öğrenci sayısı en fazla iki oldu. Öğretmen sorduğu 2022 soruyu her biri 674 sorudan oluşan üç dosyaya dağıtıp her dosyayı bu dosyadaki soruların tümünü çözmüş olan bir öğrenciye vermek istiyor. Sınıftaki öğrenci sayısının hangi en küçük değerinde öğretmen bunu her durumda yapabilir?

Çözüm: Cevap: 5.

S_i, $i = 1, 2, 3, 4$ öğrenciler olmak üzere, S_1 ve S_2 öğrencilerinin her biri ilk 1011 soruyu, S_3 ve S_4 ise son 1011 soruyu çözerse öğretmen soruları uygun şekilde üç dosyaya dağıtamaz.

Şimdi öğrenci sayısının 5 olduğu durumda öğretmenin soruları dağıtabileceğini göstereceğiz. Öğrenciler S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 olsun. $1 \le i \le 5$ olmak üzere, sadece S_i tarafından çözülmeyen soru sayısı n_i ve $1 \le i < j \le 5$ olmak üzere, hem S_i hem de S_j tarafından çözülmeyen soruların sayısı $n_{ij} = n_{ji}$ olsun. Her soruyu çözemeyen öğrenci sayısı en fazla iki olduğuna göre,

$$\sum_i n_i + \sum_{i<j} n_{ij} \le 2022$$

olur. Her $1 \le i \le 5$ için, S_i tarafından çözülmeyen soruların sayısı w_i olsun: $w_i = n_i + \sum_{i \ne j} n_{ij}$.

İddia. Öyle $1 \le p < q < r \le 5$ vardır ki, her $i, j \in \{p, q, r\}$ ve $i \ne j$ için $w_i \le 1348$ ve $n_{ij} \le 674$.

İspat. Her biri 674 den daha az soru çözmüş olan S_1, S_2, S_3 öğrencilerinin bulunduğunu varsayalım. O zaman her $i = 1, 2, 3$ için $w_i \ge 1349$ olur ve buradan da

$$3 \cdot 1349 \le w_1 + w_2 + w_3 \le 2(\sum_i n_i + \sum_{i<j} n_{ij}) \le 2 \cdot 2022$$

çelişkisi elde edilir. Buna göre, en az üç öğrenci için $w_i \leq 1348$ olacaktır. Bu öğrencilerden üçü S_1, S_2, S_3 olsun.

n_{12}, n_{13}, n_{23} sayılarının her biri en fazla 674 olursa, İddia kanıtlanmış olur. $i = 1, 2, 3$ için $w_i \leq 1348$ olduğuna göre, aksi takdire n_{12}, n_{13}, n_{23} sayılarının tam olarak biri 674 sayısından büyük olacaktır. $n_{12} > 674$ olsun. O zaman $n_{13} < 674, n_{23} < 674$ ve $w_4 < 1348, w_5 < 1348$ olur. w_2, w_3, w_4 üçlüsüne aynı mantık uygulanırsa $n_{34} > 674$ elde edilir. Bu duurmda $i = 1, 3, 5$ için $w_i \leq 1348$ ve $n_{13} < 674, n_{15} < 674, n_{35} < 674$ olur. İspat tamamlanmıştır.

İddianın önermesinin doğru olduğu öğrenciler S_p, S_q, S_r olsun. Soruları bu üç öğrenciye birer birer dağıtacağız. P sorusunu S_p, S_q, S_r öğrencilerinden birine vereceğiz. Koşullara göre, bu öğrencilerden en az biri P sorusunu çözmüştür, bu öğrenciye şu ana kadar verilmiş soru sayısı 674 den az ise P sorusunu aynı öğrenciye veriyoruz.

P sorusunu sadece S_p tarafından çözüldüğü, şu ana kadar S_p öğrencisine 674, S_q ve S_r öğrencilerinin her birine ise 674 den daha az soru verildiği durumda S_p nin sorularından bir P' sorusunu S_q ya da S_r öğrencisine verip P sorusunu da S_p öğrencisine veriyoruz. Bu yapılamazsa her P' için $n_{q,r} > 674$ olma zorundadır, bu da bir çelişkidir.

P sorusunu S_p tarafından çözüldüğü, fakat şu ana kadar S_p ve S_q öğrencilerinin her birine 674 soru verildiği durumda yukarıdaki mantıkla S_p nin sorularından bir P' sorusunu S_q ya da S_r öğrencisine verip P sorusunu S_p öğrencisine veriyoruz. Bu adımda P' sorusu S_r öğrencisine verilemiyorsa, bir P' sorusunu S_p den S_q ye ve and bir P'' sorusunu S_q den S_r ye aktaracağız (en son olarak da P yi S_p ye vereceğiz). Bu işlem tüm P'' soruları için yapılamıyorsa $\mathrm{w}_z \geq 1349$ çelişkisi geliyor.