Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ocak 2022

Soru:

$n > k \geq 0$ tam sayılar olmak üzere, her m pozitif tam sayısı ve her $a \equiv k \pmod{n}$ sayısı için

$$\frac{a^m + 3^m}{a^2 - 3a + 1}$$

ifadesi bir tam sayı değilse (n, k) ikilisine *tuhaf* ikili diyelim. n sayısının hangi en küçük değerinde (n, k) ikilisi bir k sayısı için tuhaf ikili olur?

Çözüm: Cevap: $n = 11$.

$a \equiv 5 \pmod{11}$ olsun. O zaman $11 | a^2 - 3a + 1$. Diğer taraftan

$$\{5^m, m = 1, 2, \dots\} = 5, 3, 4, 9, 1, 5, \dots$$

$$\{3^m, m = 1, 2, \dots\} = 3, 9, 5, 4, 1, 3, \dots$$

Buna göre, tüm m pozitif sayıları için $a^m + 3^m = 5^m + 3^m$ bir tam sayı değildir. Demek ki $(11, 5)$ bir tuhaf ikilidir.

$f(a, m) = \dfrac{a^m + 3^m}{a^2 - 3a + 1}$ olsun. Tüm $1 \leq n \leq 10$ değerlerinde (n, k) ikililerinin tuhaf olmadığını ispatlamak için her $1 \leq n \leq 10$ ve her $0 \leq k < n$ için $f(a, m)$ ifadesini tam sayı yapan bir $a \equiv k \pmod{n}$ sayısının bulunduğunu göstereceğiz.

$a = 0, 1, 2, 3$ için $a^2 - 3a + 1 = \pm 1$ oluyor ve dolayısıyla $f(a, m)$ bir tam sayıdır. Demek ki tüm n ve $k = 0, 1, 2, 3$ değerlerinde (n, k) tuhaf ikili değildir.

$f(4, 2), f(6, 9), f(7, 2), f(8, 20)$ sayıları tam sayılardır. Demek ki tüm n ve $k = 4, 6, 7, 8$ değerlerinde (n, k) tuhaf ikili değildir.

$f(-1, 2)$ bir tam sayı olduğuna göre, $(6, 5)$ tuhaf ikili değildir.

$f(12,9)$ bir tam sayı olduğuna göre, $(7,5)$ tuhaf ikili değildir.
$f(-3,1)$ bir tam sayı olduğuna göre, $(8,5)$ tuhaf ikili değildir.
$f(-4,14)$ bir tam sayı olduğuna göre, $(9,5)$ tuhaf ikili değildir.
$f(-5,20)$ bir tam sayı olduğuna göre, $(10,5)$ tuhaf ikili değildir.
$f(-1,2)$ bir tam sayı olduğuna göre, $(10,9)$ tuhaf ikili değildir.

Çözüm tamamlanmıştır.