Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2021

Soru:

$1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tam sayılar olmak üzere, her M tam sayısı için

$$\frac{M - b_i}{a_i},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

sayılarının en az biri tam sayıdır. Buna göre, n sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm: Cevap: 5.

Her N tam sayısı $N \equiv 0 \pmod 2$, $N \equiv 1 \pmod 3$, $N \equiv 3 \pmod 4$, $N \equiv 5 \pmod 6$, $N \equiv 9 \pmod{12}$ denkliklerinden en az birini sağlar ve dolayısıyla n sayısı 5 olabilir. $n \leq 4$ olamayacağını gösterirsek ispat tamamlanır.

$1 < k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şartı sağlayan tam sayılar ve $K = \operatorname{lcm}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ olsun. 1 den K ye kadar olan tam sayılardan en fazla $\frac{K}{k_1} + \frac{K}{k_2} + \cdots + \frac{K}{k_n}$ tanesi $x \equiv a_i \pmod{k_i}$ denkliklerinden en az birini sağlar. Böylece $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \geq 1$ elde edilir.

Şimdi şartları sağlayan en küçük n tam sayısı için koşulları sağlayan $1 < k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarını ele alalım. $n \leq 4$ olduğunu varsayalım. $k_1 = 3$ ise,

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1$$

olur. O zaman $k_1 = 2$ olmalı. Genelliği bozmadan $a_1 = 1$ kabul edebiliriz. Her $2 \leq i \leq n$ için, k_i tekse $k_i' = k_i$ ve $a_i' \equiv 2^{-1} a_i \pmod{k_i}$, k_i çiftse $k_i' = \frac{k_i}{2}$ ve $a_i' = \frac{a_i}{2}$ olsun. $k_2', \ldots, k_n'$ ve $a_2', \ldots, a_n'$ tam sayıları bölme şartını sağlarlar ancak k_i' ler farklı olmayabilir. Bu durumda, n nin en küçük seçilmesinden ötürü $n = 4$ ve $\{k_2, k_3, k_4\} = \{2m+1, 4m+2, k\}$ olmalı.

k tek ise, $\{k_2', k_3', k_4'\} = \{2m+1, 2m+1, k\}$ ve $\frac{2}{2m+1} + \frac{1}{k} \geq 1$ olur. Fakat

$$\frac{2}{2m+1} + \frac{1}{k} \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} < 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

k çift ise, $\{k'_2, k'_3, k'_4\} = \{2m+1, 2m+1, \frac{k}{2}\}$ ve $\dfrac{2}{2m+1} + \dfrac{2}{k} \geq 1$ olur.
$2m+1 \geq 5$ veya $2m+1 = 3$ ve $k \geq 8$ sağlanıyorsa,

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{4} = \frac{9}{10} < 1 \text{ ve } \frac{2}{3} + \frac{2}{8} = \frac{11}{12} < 1$$

olduğu için çelişki elde ederiz. Kalan tek durum $2m+1 = 3$ ve $k = 4$ olmasıdır. Bu durumda ise $\{k'_2, k'_3, k'_4\} = \{3, 3, 2\}$ olur. $\pmod 3$ te tam sayıların hepsi çift veya hepsi tek olamayacağı için yine çelişki elde ederiz. Çözüm tamamlanmıştır.