Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2021

Soru:

c gerçel sayısının hangi değerlerinde tüm x ve y gerçel sayıları için

$$f(x - f(y)) = f(x - y) + c(f(x) - f(y))$$

eşitliğini sağlayan ve sabit olmayan bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulunuyor?

Çözüm: **Çözüm.** Cevap: $c = 0$.

$c = 0$ için $f(x) = x$ fonksiyonu koşulları sağlıyor.

$c \neq 0$ olsun. Soruda verilen ana denklemde $x = y$ alırsak

$$f(y - f(y)) = f(0),\ \forall y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

olur. Ana denklemde y yerine $y - f(y)$ alıp (1) eşitliğini kullanırsak

$$f(x - f(0)) = f(x - y + f(y)) + c(f(x) - f(0)),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

olur. Ana denklemde $y = 0$ alırsak

$$f(x - f(0)) = f(x) + c(f(x) - f(0)),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

elde ederiz. Son iki denklemden

$$f(x - y + f(y)) = f(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

gelir. Son denklemde $y = x$ alırsak

$$f(f(x)) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

elde ederiz. Ana denklemde y yerine $f(y)$ alırsak (2) den

$$f(x - f(y)) = f(x - f(y)) + c(f(x) - f(y)),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ve dolayısıyla

$$c(f(x) - f(y)) = 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

gelir. Sonuç olarak $c \neq 0$ durumunda koşulları sağlayan sabit olmayan fonksiyon bulunmuyor.