



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Haziran 2021

Soru:

$$\frac{20 \cdot 5^n - 2}{3^n + 47}$$

ifadesini tam sayı yapan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: Koşulları sağlayan n sayısı yoktur.

n çift sayı ise $3^n + 47 = (4 - 1)^n + 47$ sayısı 4 ile bölünür fakat $20 \cdot 5^n - 2$ 4 ile bölünmüyor, çelişki.

$n = 2k + 1$ olsun. $20 \cdot 5^n - 2$ 5 ile tam bölünmediğinden $3^n + 47$ de 5 ile tam bölünmüyor. Buna göre, $3^{2k+1} + 47 \equiv (-1)^k \cdot 3 + 2 \not\equiv 0 \pmod{5}$ ve k bir tek sayıdır: $n = 4l + 3$. Bu durumda $20 \cdot 5^n - 2 = 100 \cdot 5^{4l+2} - 2$. $100 \cdot 5^{4l+2}$ bir tam karedir ve dolayısıyla $20 \cdot 5^n - 2$ sayısının her p tek asal böleni için 2 sayısı p modunda bir kare kalandır. Bu durumda $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ olduğu biliniyor. Sonuç olarak $3^n + 47$ sayısının her q tek asal böleni de $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$ şeklindedir. Diğer taraftan $3^n + 47 = 3^{4l+3} + 47 = 81^l \cdot 27 + 47 \equiv 10 \pmod{16}$ ve sonuç olarak $\frac{3^n + 47}{2} = 8m + 5$. Bu da $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$ olmasıyla çelişiyor. Çözüm tamamlanmıştır.