Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2020

Soru:

Her $k = 1, 2, \ldots, 2020$ için $f(f(f(k))) = k$ koşulunu sağlayan tüm

$$f : \{1, 2, \ldots, 2020\} \to \{1, 2, \ldots, 2020\}$$

birebir örten fonksiyonlarının sayısı N olsun. N sayısının 3^{336} sayısının bir katı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $k = 1, 2, \ldots, 2020$ için $f(f(f(k))) = k$ koşulunu sağlayan tüm

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

birebir örten fonksiyonlarının sayısı $M(n)$ olsun. $f : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to \{1, 2, \ldots, n+1\}$ fonksiyonu koşulları sağlamış olsun. O zaman $f(n+1)$ için iki seçenek bulunuyor: ya $f(n+1) = (n+1)$ ya da $f(n+1) = t, f(t) = s$ ve $f(s) = n+1$ olacak şekilde t ve s sayıları vardır. Buna göre her $n > 2$ için

$$M(n+1) = M(n) + n(n-1)M(n-2)$$

olur. $M(1) = 1, M(2) = 1$ ve $M(3) = 3$ olduğundan indirgeme formülüne göre $M(4) = 9, M(5) = 21, M(6) = 81$ olur. $M(6p-2), M(6p-1), M(6p)$ sayıları 3^a ile bölünüyorsa $i = 6p+3$ indisinden itibaren tüm $M(i)$ terimlerinin 3^{a+1} ile bölüneceğini gösterelim. $M(6p) = 3^a K$ olursa $M(6p+1) = 3^a K + 6p(6p-1)M(6p-2)$ ve $M(6p+2) = M(6p+1) + (6p+1)(6p)M(6p-1)$ elde edilir. Buna göre, $\pmod{3^{a+1}}$ incelendiğinde $M(6p+3) \equiv M(6p+2) + (6p+2)(6p+1)M(6p) \equiv 2 \cdot 3^a + 3^a \equiv 0$ olur. Benzer şekilde $M(6p{+}4), M(6p{+}5)$ ve sonuç olarak tüm sonraki terimler 3^{a+1} ile bölünür. $M(4), M(5)$ ve $M(6)$ sayıları 3 ile bölünüyor. Buna göre, $M(2020) = M(6 \cdot 336 + 4)$ sayısı 3^{336} ile bölünür.

Not: $M(2020)$ sayısını tam bölen 3'ün en büyük kuvveti 450' dir.