Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2020

Soru:

$0 < x, y, z < 1$ eşitsizliğini sağlayan tüm x, y, z gerçel sayıları için

$$\frac{xyz(x+y+z)+(xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}} \geq M$$

ise, M gerçel sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: 6.

İfadeyi

$$S = \frac{xyz(x+y+z)+(xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}} = \sum_{\text{cyc}} \frac{x - yz + \dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-xyz}}.$$

olarak yazalım. Aritmetik Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\sqrt{1-xyz} = \sqrt{x\left(\frac{1}{x} - yz\right)} \leq \frac{1}{2}\left(x - yz + \frac{1}{x}\right),$$

elde ederiz. Buna göre

$$\frac{x - yz + \dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-xyz}} \geq 2$$

olur. Bu eşitsizliğin üç döngüsel versiyonunun toplamından $S \geq 6$ gelir.

Eşitlik durumunda $x = \frac{1}{x} - yz$, $y = \frac{1}{y} - xz$ ve $z = \frac{1}{z} - xy$. Buradan da t sayısı $t^3 + t^2 = 1$ denkleminin tek kökü olmak üzere, $x = y = z = t$ gelir.