Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Haziran 2020

Soru:

99 cücenin toplam 166 kavuğu vardır. Kavuklardan her biri bir cüceye aittir ve belirli 99 renkten birine boyalıdır. Bu cücelerin her birinin kendine ait bir kavuğu giyerek katıldığı şenlikler düzenleniyor. Şenliklerin hiçbirinde aynı renkli kavuk giyen iki cüce bulunmamaktadır. Şenliklerin herhangi ikisi için bu şenliklerde farklı renkte kavuk giyen en az bir cüce bulunmaktadır. Düzenlenen şenlik sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: 2^{33}. Cüceleri ve kavuk renklerini $1, 2, \ldots, 99$ sayılarıyla numaralandıralım. $i = 1, 2, \ldots, 33$ olmak üzere, $2i-1$ ve $2i$ numaralı cücelerin her birinde $2i-1$ ve $2i$ renkli ikişer kavuk, $i = 67, 68, \ldots, 99$ numaralı cücelerin her birinde i renkli birer kavuk olursa, toplam $33 \cdot 2 + 66 = 165$ kavuk kullanılarak 2^{33} şenlik düzenlenebilir.

Şimdi şenlik sayısının 2^{33} den daha fazla olamayacağını ispatlayalım. Bunun için n cücenin $n+m$ kavuğu bulunduğu durumda düzenlenen şenlik sayısının $2^{\lfloor m/2 \rfloor}$ den fazla olamayacağını ispatlayacağız. İspat n üzerinden tümevarımla yapılacaktır. $n = 1$ durumunda tek bir renk vardır ve sadece 1 şenlik düzenlenebilir. $1 \leq 2^{\lfloor m/2 \rfloor}$ olduğuna göre tümevarım varsayımı doğrudur. Varsayım $1, \ldots, n-1$ için doğru olsun. En az kavuğu bulunan cücenin kavuk sayısı a, en az kavukta bulunan renk r, r rengine boyalı kavuk sayısı b olsun.

Durum 1: $a \leq b$. a tane kavuğu bulunan bir A cücesinin bir s renkli kavuk kullandığı şenliklerde kalan $n-1$ cüce toplamda en fazla $n+m-(a+b-1) \leq n+m-(2a-1)$ kavuk kullanabilir. $(n+m-(2a-1))-(n-1) = m-2(a-1)$ olduğuna göre, tümevarım varsayımından şenlik sayısı $2^{\lfloor m/2 \rfloor-(a-1)}$ den fazla olamaz. A cücesi a farklı renk kullanabileceği için toplam şenklik sayısı $a2^{\lfloor m/2 \rfloor-(a-1)}$ den fazla olamaz. $a2^{1-a} \leq 1$ olduğuna göre, toplam şenlik sayısı $2^{\lfloor m/2 \rfloor}$ den fazla olamaz.

Durum 2: $a > b$. Bir A cücesinin r renkli kavuk kullandığı şenliklerde kalan $n-1$ cüce toplamda en fazla $n+m-(b+a-1) \leq n+m-(2b-1)$ kavuk kullanabilir. $n+m-(2b-1)-(n-1) = m-2(b-1)$ olduğuna göre, tümevarım varsayımından şenlik sayısı $2^{\lfloor m/2 \rfloor-(b-1)}$ den fazla olamaz. r renkli kavuğu en fazla b cüce kullanabileceği için toplam şenklik sayısı $b2^{\lfloor m/2 \rfloor -(b-1)}$ den fazla olamaz. $b2^{1-b} \leq 1$ olduğuna göre, toplam şenlik sayısı $2^{\lfloor m/2 \rfloor}$ den fazla olamaz.

$n = 99, n + m = 166$ durumunda $2^{\lfloor 67/2 \rfloor} = 2^{33}$ sınırı elde edilir.