**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Şubat 2020

**Soru:**

55! tane boş kutu 1 den 55! e kadar numaralandırılmıştır. Her adımda, boş olan en küçük numaralı kutuya bir top ekleniyor ve numarası bu kutununkinden daha küçük olan (varsa) her kutudan birer top bu kutuya aktarılıyor. 55! adım sonucunda, boş olmayan en küçük numaralı kutunun numarasını ve bu kutuda kaç top olduğunu bulunuz.

*Not*: $k = 1, 2, ..., 7$ olmak üzere, $k$ adım sonucunda $1, 2, 3, 4$ ve $5$ numaralı kutulardaki top sayıları aşağıda verilmiştir:

1,0,0,0,0,...
0,2,0,0,0,...
1,2,0,0,0,...
0,1,3,0,0,...
1,1,3,0,0,...
0,0,2,4,0,...
1,0,2,4,0,...

**Çözüm:** Cevap: 55! adım sonucunda boş olmayan en küçük numaralı kutunun numarası 58 olup, bu kutudaki top sayısı 10'dur.

$m$ pozitif bir tam sayı olsun. $m$ numaralı kutudaki topların sayısı $A_m$ ve numarası en az $m$ olan bütün kutulardaki topların toplam sayısı $T_m$ olsun. O zaman $A_m \leq m$ ve $n \geq m$ olmak üzere, $n$ numaralı kutuya toplar eklenirken $T_m$ tam olarak $m$ artacağı için $T_m$ sayısı $m$'nin bir katıdır.

55! adım sonucunda boş olmayan en küçük numaralı kutunun numarası $k$ olsun. $k = 58$ olduğunu gösterelim. Çift sayıda adımdan sonra 1 numaralı kutu boş olacaktır: $k > 1$. Bir $l < 58$ için $1, 2, ..., l-1$numaralı kutular boş olsun. O zaman $l$ numaralı kutunun da boş olduğunu gösterelim. $A_l + T_{l+1} = 55!$ ve $l+1$ sayısı $T_{l+1}$ ve $55!$ sayılarını bölüyor. Buna göre, $l+1$ sayısı $A_l < l+1$ sayısını da bölüyor. Demek ki $A_l = 0$. Benzer şekilde $A_{58} = 0$ olursa, $T_{59} = 58!$ ve 59 bölüyor 58! çelişkisi elde edilir. Son olarak $A_{58} + T_{59} = 55!$ olduğundan $A_{58} = 55! \pmod{59}$. Wilson teoreminden $-1 = 55! \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 = 55! \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \pmod{59}$. Demek ki $k = A_{58} = 10$.