Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ocak 2020

Soru:

m pozitif tam sayısının asal çarpanlarına ayrımı $m = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k}$ olmak üzere, $f(m)$ türev" fonksiyonu

$$f(m) = f(p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k}) = d_1 d_2 \cdots d_k p_1^{d_1 - 1} p_2^{d_2 - 1} \cdots p_k^{d_k - 1}$$

olarak tanımlanıyor. Her L pozitif tam sayısı için $a_1 = L$ ve $a_{n+1} = f(a_n)$, $n > 1$ olarak tanımlanan $\{a_n\}, n = 1, 2, \ldots$ dizisine L "türev " dizisi diyelim.

Verilmiş bir N sayısı için, $\{a_n\}$ dizisinde $i \neq j$, $a_i = a_j \Rightarrow min(i, j) > N$ ise, $\{a_n\}$ dizisine N tekrarlanmayan dizi diyelim.

Her N sayısı için bir N tekrarlanmayan L "türev " dizisi bulunur mu?

Çözüm: Cevap: Her N sayısı için bir N tekrarlanmayan L "türev " dizisi bulunuyor.

$\{b_n\}$ dizisini $b_1 = 1$, $k = 2, ..., N-1$ için $b_{k+1} = f(b_k)(N-k+1)$ ve $k \geq N$ için $b_{k+1} = f(b_k)$ olarak tanımlayalım.

$\{b_n\}$ dizisi periyodik değilse, tüm $i, j \geq N$ için $b_i \neq b_j$ olur. Buna göre, $L = f(b_N)$ için $\{a_n\}$ dizisi N tekrarlanmayan L "türev " dizisidir.

$\{b_n\}$ periyodik ise, bu dizinin sonlu sayıda farklı terimi bulunduğundan dizisinin hiç bir teriminin bölünmediği bir p asal sayısı vardır. $L = p^N$ olmak üzere, bir "türev " dizi tanımlayalım. Bu dizide $n = 1, ..., N+1$ için $a_n = b_n p^{N-n+1}$ ve $n \geq N+2$ çin $a_n = b_n$ olur. $1 \leq i < j \leq N+1$ için a_i ve a_j terimleri farklı sayıda p asal çarpanı içeriyor ve $i \geq N+2$ için a_i terimi p ile bölünmüyor. Sonuç olarak $\{a_n\}$ dizisi N tekrarlanmayan L "türev " dizisi olur.