Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2019

Soru:

x, y, z gerçel sayılar olmak üzere, $y > 2z > 4x$ ve

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 15(xy^2 + yz^2 + zx^2) > 16(x^2y + y^2z + z^2x) + 2xyz$$

koşulları sağlanıyorsa $4x + y > 4z$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$a = x - 2y, b = y - 2z$ ve $c = z - 2x$ olsun. O zaman $b, c > 0$ olur ve $4x + y > 4z$ eşitsizliği $b > 2c$ şeklini alır. Diğer taraftan

$$x = -\frac{a + 2b + 4c}{7},\ y = -\frac{b + 2c + 4a}{7}, z = -\frac{c + 2a + 4b}{7}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} S &= 16(x^2y + y^2z + z^2x) + 2xyz - 2(x^3 + y^3 + z^3) \\ &\quad - 15(xy^2 + yz^2 + zx^2) = ab^2 + bc^2 + ca^2 - 2abc \\ &\quad = c\left(a - b + \frac{b^2}{2c}\right)^2 + b(b - c)^2 + \frac{b^2(4c^2 - b^2)}{4c} < 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $b, c > 0$ olduğuna göre, $4c^2 < b^2$ olur ve bu da $b > 2c$ eşitlizliğinin ispatını tamamlar.