Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2019

Soru:

k bir pozitif tam say olmak üzere,

$$n = 2k \text{ ise } R_n = \{-k, -(k-1), \ldots, -1, 1, \ldots, k-1, k\}$$
$$n = 2k+1 \text{ ise } R_n = \{-k, -(k-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$$

olsun. Bir düzenek birkaç bilyeden ve bazı bilye ikililerini birleştiren kırmızı veya beyaz iplerden oluşuyor. Her bir bilyeye R_n kümesindeki sayılardan birinin, iple birleştirilmiş herhangi iki bilyenin sayıları farklı olacak biçimde yazılmasına *iyi etiketleme* diyelim. Her bir bilyeye R_n kümesindeki sayılardan birinin, beyaz bir iple birleştirilmiş herhangi iki bilyenin sayıları farklı olacak, kırmızı bir iple birleştirilmiş herhangi iki bilyenin sayılarının toplamı 0 olmayacak şekilde yazılmasına *hassas etiketleme* diyelim.

$n \geq 3$ olmak üzere, R_n ile iyi etiketlenebilen her düzenek R_m ile hassas etiketlenebiliyorsa, m nin alabilecei en küçük değer nedir?

Çözüm: Cevap: $m = 2n - 1$.

R_n ile iyi etiketlenen her düzeneyin $m = 2n-1$ olmak üzere, R_m ile hassas etiketlenebileceyini gösterelim.

$$R_m = R_{2n-1} = \{-(n-1), -(n-2) \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-2, n-1\}$$

kümesinde n tane negatif olmayan sayı var. Düzeneyin bu n negatif olmayan sayıyla her iyi etiketlenmesi aynı zamanda hassas etiketlenme olacaktır.

Şimdi de R_n ile iyi etiketlenebilen, fakat her $m < 2n-1$ için R_m ile hassas etiketlenemeyen bir düzenek inşa edelim. $2n-1$ satırdan ve n sütundan oluşan bir satranç tahtasının her birim karesine birer bilye yerleştirelim. Aynı satırda yerleşen her bilye ikilisini kırmızı, farklı satırlarda ve farklı sütunlarda yerleşen her bilye ikilisine ise beyaz iple birleştirelim (ayni sütunda yerleşen bilyeler iple birleştirilmemiştir).

Bu düzenek R_n ile iyi etiketlenebilir: n farklı sayı bulunuyor, aynı sütunda yerleşen bilyelere aynı ve farklı sütunlarda yerleşen bilyelere farklı sayı yazarsak bir iyi etiketleme elde ederiz.

Bu düzeneyin R_m ile hassas etiketlendiğini varsayalım.

Durum 1. Tüm bilyelerine farklı sayı yazılmış bir satır bulunur. Bu bilyelerin herhangi ikilisi kırmızı iple birleştirilmiştir. Demek ki her k için $\{-k, k\}$ sayılarının en fazla biri yazılmıştır. Buna göre, R_m'de mutlak değerleri farklı olan en az n sayı bulunuyor ve buradan da $m \geq 2n - 1$.

Durum 2. Her satırda aynı sayılı en az iki bilye bulunur. İki satırda en az ikişer defa yazılan sayılar a ve b olsun. Farklı satırlarda ve farklı sütunlarda yerleşen her bilye ikilisi beyaz iple birleştirilmiştir. Demek ki $a \neq b$ olma zorundadır. Buna göre, en az $2n - 1$ farklı sayı bulunuyor ve $m \geq 2n - 1$. İspat tamamlanmıştır.