



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ocak 2019

Soru:

2019 kentin bulunduğu Çizgistan'daki her kent ikilisi için, Çizge Hava Yolları (ÇHY) tarafından bu kentlerden yalnızca birinden diğerine tek yönlü olarak uçak seferleri düzenlenmektedir. Her kentin kalkış noktası olduğu seferlerin sayısı ile varış noktası olduğu seferlerin sayısının farkının mutlak değeri k tam sayısını aşmamak koşuluyla bu seferler nasıl düzenlenirse düzenlensin, Çizgistan'ın herhangi bir kentinden herhangi başka bir kentine yalnızca ÇHY seferlerini kullanarak ulaşmak mümkün olmaktadır. Buna göre k 'nın alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 1009.

Soruyu çizge kavramını kullanarak yeniden ifade edelim: Bir k pozitif tam sayısı için, her köşesi $|\text{indeg}(v) - \text{outdeg}(v)| \leq k$ koşulunu sağlayan 2019 köşeli her çizgenin herhangi bir köşesinden herhangi bir diğer köşesine yol varsa, k 'nin alabileceği en büyük değer nedir? (burada $\text{indeg}(v)$ ve $\text{outdeg}(v)$ sırasıyla v köşesinin giren ve çıkan derecesidir).

İlk olarak $k = 2010$ için karşı örnek vererek $k < 1010$ olduğunu göstereyim. G nin köşelerini $|X| = 1009$ ve $|Y| = 1010$ olmak üzere, X ve Y olarak ikiye ayıralım. X in köşelerini bir çember etrafına yerleştirelim ve v , X in bir köşesi olsun. v ile onun saat yönündeki ilk 1004 komşusu arasındaki kenarlar v den bu komşu köşelere doğru, v ile onun saatin ters yönündeki ilk 1004 komşusu arasındaki kenarlar bu komşu köşelerden v ye doğru yönlendirelim. v_0 Y nin bir köşesi olsun. $Y - v_0$ tam $\frac{1}{2}$ -izgesinin kenarlarını X gibi yönlendirelim. v_0 köşesinin Y deki 1009 kenarının 504 tanesini v_0 köşesine doğru, 505 tanesini ise v_0 dan dışarı yönlendirelim. Son olarak X ve Y arasındaki tüm kenarları Y ye doğru yönlendirelim. O zaman X tam çizgesindeki tüm köşeler için $|\text{indeg}(v) - \text{outdeg}(v)| = 0$, Y tam çizgesindeki tüm köşeler için $|\text{indeg}(v) - \text{outdeg}(v)| \leq 1$ ve G tam çizgesindeki tüm köşeler için $|\text{indeg}(v) - \text{outdeg}(v)| \leq 1010$ olacaktır ve Y nin herhangi bir köşesinden X nin herhangi bir köşesine yol bulunmayacaktır.

$|\text{indeg}(v) - \text{outdeg}(v)|$ her zaman çift sayıdır. Şimdi her $v \in G$ için $|\text{indeg}(v) - \text{outdeg}(v)| \leq 1008$ olursa herhangi bir köşeden herhangi bir diğer köşeye yol bulunacağını göstereyim. Bir köşe için $\text{indeg}(v)$ ve $\text{outdeg}(v)$ sayılarından biri 505 den küçük olursa diğeri 1513 den büyük olur ve $|\text{indeg}(v) - \text{outdeg}(v)| \geq 1010$ olur. Buna göre $\text{indeg}(v)$ ve $\text{outdeg}(v)$

sayıları 505 den küçüktür. v_1 ve v_2 G nin farklı köşeleri olmak üzere, v_1 den ulaşılabilir köşelerin kümesi V_1 , her köşesinden v_2 ye ulaşılabilir köşelerin kümesi ise V_2 olsun. O zaman başlangıç noktası V_1 de olan okların bitiş noktaları da V_1 de olacak ve buna göre de $v \in V_1$ olmak üzere, $\text{outdeg}(v)$ derecelerinin toplamı $\binom{|V_1|}{2}$ olacak. Diğer taraftan, bu toplam en az $505|V_1|$ olacaktır. O zaman $|V_1| \geq 1011$ olur. Benzer şekilde $|V_2| \geq 1011$ elde edilir. Buna göre V_1 ve V_2 kümelerinin kesişimi boş küme değildir. İspat tamamlanmıştır.