



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Eylül 2018

Soru:

Her a, b pozitif tam sayı ikilisi için $n^2 + an + b$ sayısının en az 2018 farklı asal böleninin olmasını sağlayan bir n pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm:

k üzerinden tümevarım yaparak her (a, b) a, b pozitif tam sayı ikilisi için $n^2 + an + b$ sayısının en az k farklı asal böleninin olmasını sağlayan bir n pozitif tam sayısının bulunduğunu gösterelim. $k = 1$ durumu açıktır. Şimde bir n_k değerinde $n_k^2 + an_k + b$ sayısının p_1, p_2, \dots, p_k asal bölenlerinin olduğunu varsayalım. O zaman $p_1 p_2 \dots p_k$ sayısı $m = n_k^2 + an_k + b$ sayısını bölecektir. $n_{k+1} = n_k(m^2 + 1)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} n_{k+1}^2 + an_{k+1} + b &= n_k^2(m^2 + 1)^2 + an_k(m^2 + 1) + b \\ &= n_k^2(m^4 + 2m^2 + 1) + an_k(m^2 + 1) + b = n_k^2 m^4 + 2m^2 n_k^2 + an_k m^2 + m \\ &= m(n_k^2 m^3 + 2mn_k^2 + an_k m + 1). \end{aligned}$$

Son ifade p_1, p_2, \dots, p_k asal sayılarıyla, m ve $n_k^2 m^3 + 2mn_k^2 + an_k m + 1$ aralarında asal olduğuna göre ise bu asal sayılardan farklı bir p_{k+1} asal sayısı ile de bölünüyor. Tümevarım varsayımı $k + 1$ için ispatlandı.