Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Haziran 2018

Soru:

Bir okulda düzenlenen satranç turnuvasında herhangi iki öğrenci aralarında tam olarak bir maç yapıyor. Her kız öğrenci en az a erkek öğrenciyi ve her erkek öğrenci en az b kız öğrenciyi yendiyse bu okulda en az kaç öğrenci bulunabilir?

Çözüm: Cevap: $a + b + \lceil 2\sqrt{ab}\, \rceil$.

Turnuvaya katılan kız öğrencilerin sayısı x, erkek öğrencilerin sayısı y olsun. O zaman $xy \geq ax + by$ olma zorundadır. Şimdi bu koşulun aynı zamanda yeterli olacağını kanıtlayalım. $x \times y$ tablosu çizelim ve m. satır ve n. sütunun kesişimindeki birim kareye m numaralı kız öğrenci n numaralı erkek öğrenciyle yaptığı maçı kazandıysa **1**, kaybettiyse **0** yazalım. Şimdi her satırda en az a tane **1** ve her sütununda en az b tane **0** bulunan bir tablonun bulunduğunu gösterelim. Başlangıçta ilk a sütundaki tüm birim karelere **1**, diğer birim karelere **0** yazalım. $\mathbf{0}'$ ların toplam sayısı by' den az olmadığından, k. sütunda $\mathbf{0}'$ ların sayısı b' den az ise, bir başka sütunda $\mathbf{0}'$ ların sayısı b den fazla olacaktır, bu sütunun numarası l olsun. O zaman bir satırın k. sütunla kesişiminde **0**, l. sütunla kesişiminde ise **1** bulunacaktır. Bu **0** ve $\mathbf{1}'$ in yerlerini değiştirelim. Bu işlemden sonra b den az **0** bulunduran sütunda $\mathbf{0}'$ ların sayısı artacak ve satırlardaki $\mathbf{1}'$ lerin sayısı değişmeyecektir. Demek ki sonlu sayıda işlem sonucunda istenilen tablo elde edilecektir.

Şimdi $x + y'$ nin alabileceği en küçük değeri bulalım. $xy \geq ax + by$ eşitsizliğini

$$(x - b)(y - a) \geq a \cdot b. \qquad (1)$$

gibi yazabiliriz. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini kullanırsak

$$(x - b) + (y - a) \geq 2\sqrt{(x - b)(y - a)} \geq 2\sqrt{a \cdot b}$$

elde ederiz. Demek ki $x + y \geq a + b + \lceil 2\sqrt{ab}\, \rceil$. Şimdi $x + y = a + b + \lceil 2\sqrt{ab}\, \rceil$ koşulunu sağlayan x ve y değerlerini bulalım.

$\lceil 2\sqrt{ab}\,\rceil = 2k$ çift sayı ise $x = b + k$ ve $y = a + k$ değerleri (1) eşitsizliğini sağlıyorlar: $(x-b)(y-a) = k^2 \geq 4ab/4 = ab$.

$\lceil 2\sqrt{ab}\,\rceil = 2k+1$ tek sayı ise $x = b + k$ ve $y = a + k + 1$ değerleri yine (1) eşitsizliğini sağlıyorlar: $(x-b)(y-a) = k(k+1) \geq 4ab/4 - 1/4$ ve $k(k+1)$ tam sayı olduğundan $k(k+1) \geq ab$. Çözüm tamamlanmıştır.