Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2017

Soru:

2017 kentin bulunduğu bir ülkede, her kentten kalkan en az bir sefer olacak biçimde, her kent ikilisi arasında tek yönlü uçak seferleri yapılmaktadır. Seferler nasıl düzenlenmiş olursa olsun, her kentten en çok bir aktarma ile ulaşılabilen k kent bulunuyorsa, k'nın alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: k'nın en büyük değeri 3'tür.

A da başlayıp B de biten seferleri $A \to B$ olarak işaretleyeceğiz. $A \to B \to C \to A$ ve A, B, C ile ilgili tüm diğer seferler bu üç kent yönünde olursa $k \leq 3$ elde edilir. A kentine herhangi bir diğer kentten en fazla bir aktarmayla ulaşılırsa A ya *2-uzak* kent diyelim. Şimdi her sefer düzenlemesinde en az üç tane 2-uzak kentin bulunacağını gösterelim. Bu soruyu çizge teorisi kavramlarıyla formüle edelim: n köşeli yönlü bir G çizgesinde her köşenin giriş derecesi $deg_{in}(A)$ en fazla $n-2$ olursa G de en az üç tane 2-uzak köşe bulunur. İlk önce G deki giriş derecesi en büyük olan A_1 köşesinin 2-uzak olduğunu gösterelim. $A_1 \to X$ koşulunu sağlayan tüm X köşelerinin kümesi U_1, $Y \to A_1$ koşulunu sağlayan tüm Y köşelerinin kümesi W_1 olsun. Her $Y \in W_1$ den A_1'e direkt ulaşılıyor. Herhangi bir $X_0 \in U_1$ den A_1'e bir aktarmayla ulaşılamıyorsa, her $Y \in W_1$ için $Y \to X_0$ olacaktır (aksi taktirde A_1'e bir aktarmayla ulaşım vardır: $X_0 \to Y \to A_1$). Fakat o zaman $deg_{in}X_0 \geq deg_{in}(A)+1$ ve bu da $deg_{in}A_1$'in en büyük olmasıyla çelişiyor. Şimdi boş olmayan U_1 kümesindeki giriş derecesi en büyük olan koşe A_2 olsun. $A_2 \to X$ koşulunu sağlayan tüm X köşelerinin kümesi U_2, $Y \to A_2$ koşulunu sağlayan tüm Y köşelerinin kümesi W_2 olsun. Her $Y \in W_2$ den A_2'ye direkt ulaşılıyor. Herhangi bir $X_0 \in U_2$ den A_2'ye bir aktarmayla ulaşılamıyorsa, her $Y \in W_2$ için $Y \to X_0$ olacaktır (aksi taktirde A_2'ye bir aktarmayla ulaşım vardır: $X_0 \to Y \to A_2$). Fakat o zaman $deg_{in}X_0 \geq deg_{in}(A_2) + 1$ ve bu da $deg_{in}A_2$'nin en büyük olmasıyla çelişiyor. Şimdi boş olmayan U_2 kümesindeki giriş derecesi en büyük olan koşe A_3 olsun. $A_3 \to X$ koşulunu sağlayan tüm X köşelerinin kümesi U_3, $Y \to A_3$ koşulunu sağlayan tüm Y köşelerinin kümesi W_3 olsun. Her $Y \in W_3$ den A_3'e direkt ulaşılıyor. Herhangi bir $X_0 \in U_3$ den A_3'e bir aktarmayla ulaşılamıyorsa, her $Y \in W_3$ için $Y \to X_0$ olacaktır (aksi taktirde A_e'e bir aktarmayla ulaşım vardır: $X_0 \to Y \to A_3$). Fakat o zaman $deg_{in}X_0 \geq deg_{in}(A_3) + 1$ ve bu da $deg_{in}A_3$'ün en büyük olmasıyla çelişiyor. Her biri 2-uzak olan A_1, A_2, A_3 köşeleri birbirinden farklı olduğundan ispat tamamlanmıştır (yukarıdaki işleme bir kez daha devam edersek elde edeceğimiz A_4 köşesi A_1 ile aynı olabilir!).