Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2017

Soru:

n pozitif tam sayı olmak üzere, n den küçük ve n ile arasında asal olan pozitif tam sayıların sayısı $\phi(n)$ olsun.

$$2^n + (n - \phi(n) - 1)! = n^m + 1$$

eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(m, n) = (2, 2), (2, 4)$.

$n = 1$ ise $2 + 1 = 2$, demek ki $n > 1$.

n bir asal sayı ise, $\phi(n) = n - 1$ ve $2^n = n^m$. O zaman $m = n = 2$.

p bir asal sayı olmak üzere, $n = p^2$ ise, $\phi(n) = p^2 - p$ ve buradan $2^{p^2} + (p - 1)! = p^{2m} + 1$. $p = 2$ durumunda $m = 2$ elde edilir. $p > 2$ ise $(p - 1)! \equiv 2 \pmod 4$, buradan da $p = 3$. Fakat $2^9 + 2 = 514 = 3^{2m} + 1$ denkleminin çözümü bulunmuyor.

Diğer durumlarda n nin en küçük asal böleni p olsun. O zaman $1 < p < 2p < \cdots < p^2 < n$ olduğundan $n - 1 - \phi(n) \geq p$. Buradan $p \mid (n - \phi(n) - 1)!$ Demek ki $p \mid 2^n - 1$ ve p tek sayıdır. Fermat küçük teoreminden $p \mid 2^{p-1} - 1$. Şimdi n ve $p - 1$ aralarında asal olduğundan $an - b(p - 1) = 1$ olacak şekilde a ve b tam sayıları bulunur. O zaman

$$1 \equiv 2^n \equiv 2^{an} \equiv 2^{1+b(p-1)} \equiv 2 \cdot 2^{b(p-1)} \equiv 2 \pmod p$$

çelişkisini elde ediyoruz. Demek ki $(m, n) = (2, 2), (2, 4)$ dışında çözüm yoktur.